NGUYỄN MỘNG HY - ĐẬU THẾ CẤP

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC GIẢI TÍCH 12

- BỒI DƯỠNG HỌC SINH KHÁ, GIỎI
- ÔN THI TÚ TÀI VÀ CÁC KÌ THI QUỐC GIA



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN MỘNG HY - ĐẬU THẾ CẤP

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

◆ Dành cho học sinh lớp 12
chuẩn bị thi tú tài và các kì thi Quốc gia

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI MỞ ĐẦU

Cuốn sách "**PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC GIẢI TÍCH**" này được biên soạn dựa trên nội dung sách giáo khoa *Hình học 12* chỉnh lý và hợp nhất năm 2000. Chúng tôi đã sắp xếp các nội dung ôn tập môn học này theo chuyên đề và mỗi chuyên đề lại được chia ra các vấn đề chi tiết và cụ thể. Mỗi chuyên đề được trình bày theo trình tự sau đây :

A. Tóm tắt lí thuyết.

B. Phương pháp giải toán.

C. Các bài toán ôn tập.

D. Các đề toán tự luyện.

Chúng tôi có trích và lựa chọn đưa thêm một số đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng trong toàn quốc những năm gần đây, giúp các bạn học sinh làm quen với các loại đề toán đó.

Cuốn sách này được biên soạn nhằm giúp đỡ người học có điều kiện để tự học tốt hơn, rèn luyện được óc tư duy sáng tạo trong học tập của học sinh để không ngừng nâng cao chất lượng học tập.

Cuốn sách gồm có 10 chuyên đề và được chia ra hai phần : phần 1 là phần hình học giải tích trong mặt phẳng do TS. Đậu Thế Cấp biên soạn, phần 2 là phần hình học giải tích trong không gian do PGS.TS Nguyễn Mộng Hy biên soạn. Cuối cùng có phần trắc nghiệm nhằm giúp người học hoàn thiện thêm kiến thức của mình.

Chúng tôi mong rằng sẽ nhận được nhiều ý kiến đóng góp của đông đảo độc giả để các lần tái bản sau này, cuốn sách được cải tiến với nội dung và chất lượng tốt hơn.

Các tác giả

Chuyên đề 1 : VECTƠ VÀ TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM M(X; Y) ĐỐI VỚI HỆ TỌA ĐỘ $\left\{O; \vec{e_1}; \vec{e_2}\right\}$

$M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$.

2. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

- $\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$.
- Với $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ thì : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

3. CÁC PHÉP TOÁN VỀ VECTƠ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$, $k \in \mathbb{R}$, khi đó :

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$; $\quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$.
- $\vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$

  Nếu $\vec{a} = k\vec{b}$: hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **cùng phương**, kí hiệu $\vec{a} // \vec{b}$.

  Chú ý : *Vectơ* $\vec{0}$ *được coi là cùng phương với mọi vectơ.*
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$.

4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

  Cho : $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\quad \vec{b} = (b_1; b_2)$

  $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

5. ĐIỂM M CHIA ĐOẠN THẲNG AB THEO TỈ SỐ $k \neq 1$

- $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \forall O,\ \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\,\overrightarrow{OB}}{1-k}$

Tọa độ của M : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}$.

- M là trung điểm của đoạn AB $\Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$

$$(x_M;\, y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2};\, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

6. MỘT SỐ HỆ THỨC THƯỜNG GẶP

- Với ba điểm O, A, B bất kỳ, ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ (hệ thức Chasles)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

- M là trung điểm của đoạn AB, với O bất kỳ ta có : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

- G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \forall O,\ \overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

7. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC

Cho $\vec{a} = (a_1;\, a_2)$, $\vec{b} = (b_1;\, b_2)$.

- $|\vec{a} \pm \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (bất đẳng thức tam giác)

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

- $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}|.|\vec{b}|$ (*)

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} |a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq ((a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : CHỨNG MINH HỆ THỨC VECTƠ. TÌM TỌA ĐỘ VECTƠ CỦA ĐIỂM

A. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các tính chất của phép toán vectơ và công thức tính độ dài của vectơ.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC với G là trọng tâm của tam giác đó :

a) Với mọi điểm M, chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

b) Chứng minh rằng : $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$; $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

c) Tìm tọa độ của G trong trường hợp A(–1; 3), B(2; 1), C(1; –5).

Giải

a) Ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$

$$= 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG}.$$

b) Theo a), chọn M ≡ O ta có : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases}$.

Vậy có điều cần chứng minh.

c) Theo b) $\begin{cases} x_G = \dfrac{-1+2+1}{3} = \dfrac{2}{3} \\ y_G = \dfrac{3+1-5}{3} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$

Ví dụ 2

Tìm điểm M trên trục tung cách đều hai điểm A(–1; 3) và B(1; 4).

Giải

Giả sử M(0; m). Khi đó :

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(-1)^2 + (3-m)^2} = \sqrt{1^2 + (4-m)^2} \Rightarrow m = \frac{7}{2}$$

Vậy $M\left(0; \dfrac{7}{2}\right)$.

Vấn đề 2 : CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 3

Chứng minh ba điểm : A(m, 2m + 1); $B\left(\frac{1}{m-1};\frac{m+1}{m-1}\right)$; C(2 – m; 5 – 2m) thẳng hàng với mọi $m \neq 1$.

Giải

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{-m^2+m+1}{m-1}; \frac{2(-m^2+m+1)}{m-1}\right); \quad \overrightarrow{AC} = (2-2m; 4-4m).$$

Vì $\frac{-m^2+m+1}{m-1}(4-4m) - (2-2m).\frac{2(-m^2+m+1)}{m-1} = 0$ nên $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$.

Vậy A, B, C thẳng hàng với mọi $m \neq 1$.

Vấn đề 3 : TÌM ĐIỂM TRÊN ĐOẠN THẲNG CÓ TÍNH CHẤT CHO TRƯỚC

A. PHƯƠNG PHÁP

Xác định tỷ số chia đoạn thẳng, sau đó sử dụng công thức để tính.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có các đỉnh A(2; 6), B(–3; –4), C(5; 0). Xác định tọa độ chân đường phân giác AD.

Giải

$$AB = \sqrt{(-5)^2+(-10)^2} = 5\sqrt{5}; \quad AC = \sqrt{3^2+(-6)^2} = 3\sqrt{5}$$

Từ đó : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$, tức D chia đoạn BC theo tỷ số $k = -\frac{5}{3}$.

Vậy áp dụng công thức tính tọa độ điểm D, ta có :

$$x_D = \frac{-3+\frac{5}{3}.5}{1+\frac{5}{3}} = 2; \quad y_D = \frac{-4+\frac{5}{3}.0}{1+\frac{5}{3}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow D\left(2; -\frac{3}{2}\right).$$

Vấn đề 4 : CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. PHƯƠNG PHÁP

$$AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0.$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 5

Cho hình thang cân ABCD đáy lớn AB, góc nhọn ở đáy 60^0. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $|\vec{a}| > |\vec{b}|$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Tìm mối liên hệ giữa $|\vec{a}| = a$ và $|\vec{b}| = b$ để $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

(ĐỀ THI ĐH GIAO THÔNG VẬN TẢI - 1998)

Giải

Hạ $CC_1 \perp AB$, $DD_1 \perp AB$. Ta có :

$$\left|\overrightarrow{AD_1}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}b; \quad \left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{D_1C_1}\right| = a - b$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DC} = \frac{a-b}{a}\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{a-b}{a}\vec{a}$$

Vậy : $\overrightarrow{BC} = -\frac{b}{a}\vec{a} + \vec{b}$; $\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \frac{b}{a}\vec{a} + \vec{b}$;

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}.$$

Từ đó $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \left(\vec{a} - \frac{b}{a}\vec{a} + \vec{b}\right)(-\vec{a} + \vec{b}) = 0$

$$\Leftrightarrow -\vec{a}^2 - \frac{b}{a}\vec{a}\vec{b} + \frac{b}{a}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = 0 \Leftrightarrow -a^2 - \frac{b}{a}.\frac{1}{2}ab + \frac{b}{a}a^2 + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 = (a+b)^2 \Leftrightarrow b = (\sqrt{3} - 1)a.$$

Vấn đề 5 : TÍNH GÓC

A. PHƯƠNG PHÁP

Đưa về tìm góc giữa vectơ và áp dụng công thức để tính.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC có A(3; 5), B(-5; 1), C(5; -9). Tính $\widehat{BAD}$ với AD là trung tuyến của tam giác đó.

Giải

Ta có : D(0; -4). Từ đó : $\cos\widehat{BAD} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{AB.AD}$

$$\overrightarrow{AB} = (-8; -4) \Rightarrow AB = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AD} = (-3; -9) \Rightarrow AD = \sqrt{9 + 81} = 3\sqrt{10}$$

Suy ra : $\cos\widehat{BAD} = \frac{24 + 36}{4\sqrt{5}.3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $\widehat{BAD} = 45^0$.

Vấn đề 6 : CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. PHƯƠNG PHÁP

Đưa về dạng vectơ và sử dụng các bất đẳng thức :

$$|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}|.|\vec{b}| \text{ hoặc } |\vec{a} \pm \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 7

Cho ba số dương a, b, c (a > c, b > c). Chứng minh rằng :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}.$$

Giải

Đặt $\vec{u} = (\sqrt{c}; \sqrt{b-c})$, $\vec{v} = (\sqrt{a-c}; \sqrt{c})$. Dễ thấy vế trái là $\vec{u}.\vec{v}$, vế phải là $|\vec{u}|.|\vec{v}|$. Vậy có điều phải chứng minh.

Ví dụ 8

Cho x, y, z ∈ ℝ. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \ge \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Giải

Ta có : $\sqrt{x^2 + xy + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2}$

$$\sqrt{x^2 + xz + z^2} = \sqrt{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}z^2}.$$

Đặt : $\vec{u} = \left(x + \frac{y}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$; $\vec{v} = \left(-x - \frac{z}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$. Khi đó :

$$VT = |\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}| = \left|\left(\frac{y-z}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z)\right)\right|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(y-z)^2 + \frac{3}{4}(y+z)^2} = \sqrt{y^2 + yz + z^2} = VP.$$

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ cho bốn điểm A(–2; –6), B(4; –4), C(2; –2), D(–1, –3).

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang.

Giải

a) Ta có : $\overrightarrow{AC} = (4; 4)$; $\overrightarrow{BC} = (-2; 2)$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 4(-2) + 4.2 = 0 \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

b) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$; $\overrightarrow{DC} = (3; 1)$

Do đó : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC} \Rightarrow AB \,//\, DC$. Vậy ABCD là hình thang.

Bài 2

Cho ba điểm A(–3; 6), B(1; –2), C(6; 3).

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ chân đường cao A' xuất phát từ A.

c) Tính tọa độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của tam giác ABC. Có nhận xét gì về các điểm G, H, I ?

Giải

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (4; -8)$; $\overrightarrow{AC} = (9; -3)$

Vì $\frac{4}{9} \neq \frac{-8}{-3}$ nên A, B, C không thẳng hàng, từ đó chúng là ba đỉnh của một tam giác.

b) Ta có : $\overrightarrow{BC} = (5; 5)$, $\overrightarrow{BA'} = (x_{A'} - 1; y_{A'} + 2)$.

Vì $\overrightarrow{BC} \,//\, \overrightarrow{BA'}$ nên $\frac{x_{A'} - 1}{5} = \frac{y_{A'} + 2}{5}$

Mặt khác $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0$ nên $(x_{A'} + 3)5 + (y_{A'} - 6)5 = 0$.

Từ đó : $\begin{cases} x_{A'} - y_{A'} = 3 \\ x_{A'} + y_{A'} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 3 \\ y_{A'} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(3; 0)$

c) • $AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (x_H + 3)5 + (y_H - 6)5 = 0$

$BH \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (x_H - 1)9 + (y_H + 2)(-3) = 0$.

Từ đó $\begin{cases} x_H + y_H = 3 \\ 3x_H - y_H = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1)$.

• $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow G\,(4/3; 7/3)$.

• Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow IA = IB = IC$.

$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (x_I + 3)^2 + (y_I - 6)^2 = (x_I - 1)^2 + (y_I + 2)^2 \Leftrightarrow x_I - 2y_I = -5$

$IA^2 = IC^2 \Leftrightarrow (x_I + 3)^2 + (y_I - 6)^2 = (x_I - 6)^2 + (y_I - 3)^2 \Leftrightarrow 3x_I - y_I = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_I - 2y_I = -5 \\ 3x_I - y_I = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 3 \end{cases} \Rightarrow I(1; 3)$

$\overrightarrow{IH} = (1; -2)$; $\overrightarrow{IG} = \left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3}(1; -2) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IH}$

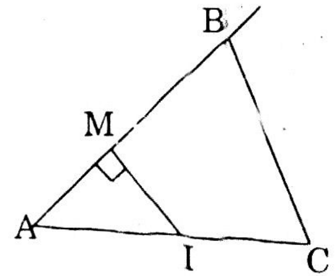
$\Rightarrow \overrightarrow{IG} // \overrightarrow{IH} \Rightarrow$ G, H, I thẳng hàng.

Bài 3

Trong mặt phẳng cho tam giác ABC có A(5; 4), B(–1; 1), C(3; –2), M là một điểm di động thỏa mãn hệ thức $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (α, β không đồng thời bằng 0). Xác định M để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

Giải

Nếu $\beta \neq 0$ thì $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\overrightarrow{MA}$, nếu $\alpha \neq 0$ thì $\overrightarrow{AB} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}\overrightarrow{MB}$. Do đó A, B, M thẳng hàng hay M nằm trên đường thẳng AB. Bài toán trở thành : Tìm M trên AB để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.



Gọi I là trung điểm của AC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi $|\overrightarrow{MI}|$ nhỏ nhất. Vì I cố định nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I trên AB

$\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Rightarrow \dfrac{x_M - 5}{-6} = \dfrac{y_M - 4}{-3} \Rightarrow x_M - 2y_M = -3$

$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$; vì I(4; 1) nên

$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow (x_M - 4).(-6) + (y_M - 1)(-3) = 0 \Leftrightarrow 2x_M + y_M = 9.$

$$\begin{cases} x_M - 2y_M = -3 \\ 2x_M + y_M = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = 3 \end{cases} \Rightarrow M(3; 3)$$

Bài 4

Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC có một điểm D sao cho $\overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ và một điểm E thỏa mãn hệ thức : $4\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{ED}$ theo $\overrightarrow{EB}$ và $\overrightarrow{ED}$.

b) Chứng minh ba điểm E, A, D thẳng hàng.

Giải

a) $\overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC} \Rightarrow 5\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow 5\overrightarrow{BD} = 3(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad \Rightarrow 2(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}) + 3(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}) = \vec{0}$

$\Rightarrow 5\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} \quad \Rightarrow \overrightarrow{ED} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{EC}$.

b) $\begin{cases} 4\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0} \\ 5\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} \end{cases} \Rightarrow 4\overrightarrow{EA} + 5\overrightarrow{ED} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{EA} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{ED}$

$\Rightarrow$ A, E, D thẳng hàng.

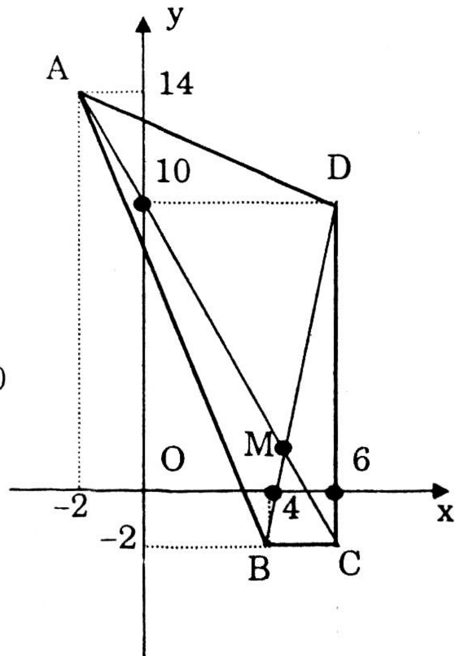
Bài 5

Cho tứ giác ABCD có các đỉnh A(–2; 14), B(4; –2), C(6; –2), D(6; 10).

a) Tìm tọa độ giao điểm M của hai đường chéo AC, BD.

b) Xác định góc $\widehat{M}$ và góc $\widehat{D}$ của tam giác AMD. Các góc này nhọn hay tù ?

Giải



a) $\overrightarrow{BM} = (x_M - 4; y_M + 2)$, $\overrightarrow{BD} = (2; 12)$

Vì $\overrightarrow{BM} // \overrightarrow{BD}$ nên $12(x_M - 4) - 2(y_M + 2) = 0$

$\Rightarrow 6x_M - y_M = 26.$

Tương tự : $\overrightarrow{CM} = (x_M - 6; y_M + 2)$,

$\overrightarrow{CA} = (-8; 16)$

$\Rightarrow 16(x_M - 6) + 8(y_M + 2) = 0 \Rightarrow 2x_M + y_M = 10$

$\begin{cases} 6x_M - y_M = 26 \\ 2x_M + y_M = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{9}{2} \\ y_M = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{9}{2}; 1\right)$

b) • $\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{13}{3}; 13\right)$; $\quad \overrightarrow{MD} = \left(-\frac{3}{2}; 9\right)$.

$$\text{Suy ra : } \cos\widehat{M} = \cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}\right) = \frac{-\frac{13}{2}.\frac{3}{2} + 13.9}{\sqrt{\left(-\frac{13}{2}\right)^2 + 13^2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9^2}} = \frac{11\sqrt{629}}{629}$$

Vì $\cos\widehat{M} > 0$ nên $\widehat{M}$ nhọn, $\widehat{M} \approx 63^0 54'$.

• $\overrightarrow{DA} = (-4; 4)$, $\overrightarrow{DM} = \left(-\frac{3}{2}; -9\right)$.

$$\text{Suy ra : } \cos\widehat{D} = \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DM}) = \frac{(-4)\left(-\frac{3}{2}\right) + 4(-9)}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2}\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-9)^2}} = -\frac{5\sqrt{666}}{222}.$$

Vì $\cos\widehat{D} < 0$ nên $\widehat{D}$ tù, $\widehat{D} \approx 124^0 27'$.

Bài 6

Cho M(1; 1 – cosα), N(3; 4).

a) Tính OM, MN.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

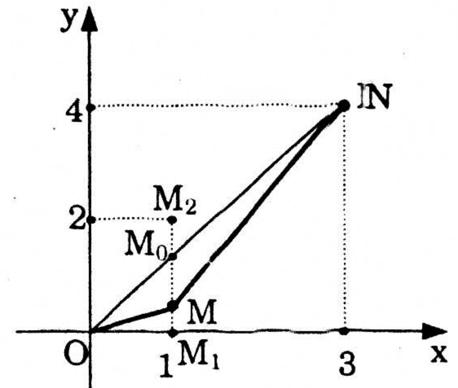
$$y = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 2} + \sqrt{\cos^2\alpha + 6\cos\alpha + 13}.$$

Giải

a) Ta có : $OM = \sqrt{1^2 + (1-\cos\alpha)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 2}$

$MN = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1+\cos\alpha)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + 6\cos\alpha + 13}$

Vì $0 \le 1 - \cos\alpha \le 2$ nên M di động trên đoạn M_1M_2 với $M_1(1; 0)$, $M_2(1; 2)$



b) Ta có : $y = OM + MN \ge ON$

Do đó : $\min y = ON = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ khi O, M, N thẳng hàng ($M \equiv M_0$ giao điểm của ON và M_1M_2).

$OM_1 + M_1N = 1 + \sqrt{(3-1)^2 + 4^2} = 1 + \sqrt{20}$

$OM_2 + M_2N = \sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5} + \sqrt{8}$

Vì $\sqrt{5} + \sqrt{8} < 1 + \sqrt{20}$ nên $y = OM + MN \le OM_1 + M_1N = 1 + \sqrt{20}$

$\max y = 1 + \sqrt{20}$ khi $M \equiv M_1(1; 0)$.

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Cho ba điểm A(2; 1), B(2; –1), C(–2; –3).

a) Tìm tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành.

b) Tìm tọa độ tâm của hình bình hành.

ĐS : a) D(–2; –1); b) (0; –1).

02. Cho tam giác ABC có các đỉnh A(4; 6), B(–4; 0), C(–1; –4).

a) Xác định hình dạng của tam giác.

b) Tìm tọa độ chân đường cao BH.

ĐS : a) Tam giác ABC vuông tại B; b) H(0; –2).

03. Cho vectơ $\vec{a} = (5; 2)$; $\vec{b} = (7; -3)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} \vec{a}\vec{x} = 38 \\ \vec{b}\vec{x} = 30 \end{cases}$.

ĐS : $\vec{x} = (6; 4)$.

04. Cho A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

05. Cho hai điểm A(–3; 2), B(4, 3). Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tam

giác MAB vuông tại M.

ĐS : M(–2; 0) hoặc M(3; 0).

06. Cho tam giác ABC với A(1; 5); B(–4; –5); C(4; –1).

a) Tìm tọa độ chân các đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{A}$.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

ĐS : a) $\left(1; -\frac{5}{2}\right)$, (16; 5), b) (1; 0).

07. Cho hai điểm A(4; –3) và (3; 1). Tìm điểm M trên trục Ox sao cho $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{4}$

ĐS : $M\left(\frac{11+\sqrt{33}}{2}; 0\right)$.

08. Cho tứ giác ABCD có các đỉnh A(–5; –1), B(–2; 3), C(5, 4), D(1; –3). Chứng minh tứ giác có hai đường chéo vuông góc. Tìm diện tích của tứ giác.

ĐS : $\frac{75}{2}$.

09. Cho ba điểm A(–3; 6), B(1; –3), C(6; 3).

a) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC. Chứng minh $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$.

c) Tìm tọa độ hình chiếu của A trên BC.

d) Tìm tọa độ H' đối xứng với H qua BC. Chứng minh H' nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

ĐS : b) $G\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$, H(2; 1), I(1; 3); c) (3; 0); d) H' (4; –1).

10. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $\sqrt{(a-b)^2+c^2} + \sqrt{(a+b)^2+c^2} \geq 2\sqrt{a^2+c^2}$.

b) $\sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x^2+2x+10} \geq \sqrt{29}$.

11. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $y = \sqrt{x^2-2px+2p^2} + \sqrt{x^2-2qx+2q^2}$ (p, q là hằng số).

ĐS : $\min y = \sqrt{(p-q)^2 + (|p|+|q|)^2}$.

12. Cho $\vec{a} = (1; 2\sqrt{2})$; $\vec{b}(\sqrt{x}; \sqrt{2-x})$, $0 \leq x \leq 2$.

a) Tính $|\vec{a}|$; $|\vec{b}|$; $\vec{a}.\vec{b}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$, $0 \leq x \leq 2$.

ĐS : b) $\max y = 3\sqrt{2}$; $\min y = \sqrt{2}$.

Chuyên đề 2 : ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. PHƯƠNG TRÌNH CỦA MỘT ĐƯỜNG

Phương trình $F(x; y) = 0$ gọi là phương trình của đường (L) nếu $M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow F(x; y) = 0$

Hệ : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ gọi là phương trình tham số của đường (L) nếu $M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

i) Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu $\vec{a} // d$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ có phương trình tham số là d : $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

Đường thẳng d có phương trình chính tắc là :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (a_1 \neq 0, a_2 \neq 0).$$

ii) Phương trình tổng quát của đường thẳng

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ nếu $\vec{n} \perp \vec{a}$ hay $\vec{n}.\vec{a} = 0$.

Đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ và đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ có phương trình tổng quát là :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$$

Phương trình dạng : $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ (*) gọi là **phương trình tổng quát** của đường thẳng.

Đường thẳng cho bởi phương trình (*) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B)$ và một vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (-B; A)$.

iii) Phương trình đường thẳng theo hệ số góc

Hệ số góc của đường thẳng d là số $k = \text{tg}\alpha$, trong đó α là góc giữa trục Ox và đường thẳng d.

Đường thẳng d có hệ số góc k, đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ có **phương trình là** $d : y - y_0 = k(x - x_0)$.

- $k = \infty$ ($\alpha = \pm 90^0$)

  $d : x - x_0 = 0$.

- Cho d_1 có hệ số góc k_1, d_2 có hệ số góc k_2

  $d_1 // d_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$

  $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$

  $tg(\widehat{d_1, d_2}) = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

iv) Đường thẳng đi qua hai điểm cho trước

Cho đường thẳng d đi qua $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$

Khi đó d có phương trình là :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

- d có hệ số góc là $k = \dfrac{y_B - y_B}{x_B - x_A}$.

- Đường thẳng d đi qua hai điểm $A(a; 0)$, $B(0; b)$ có **phương trình (gọi là** phương trình đường thẳng theo đoạn chắn) là : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$; $ab \neq 0$.

v) Phương trình pháp dạng của đường thẳng

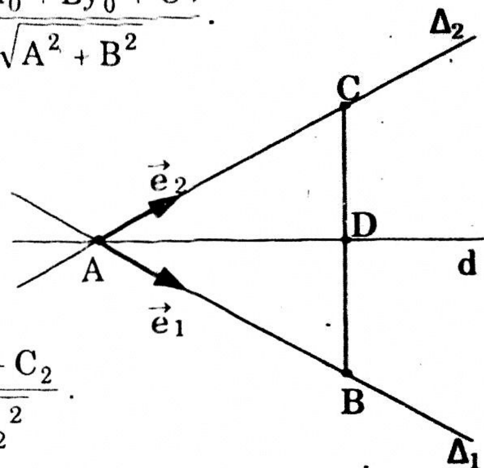
Phương trình của đường thẳng d : $A_0 x + B_0 y + C_0 = 0$ **với** $A_0^2 + B_0^2 = 1$ gọi là phương trình pháp dạng.

- Phương trình tổng quát $Ax + By + C = 0$ được **đưa về phương trình** pháp dạng bằng cách chia cả hai vế cho $\sqrt{A^2 + B^2}$.

3. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm $I(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$. **Ký hiệu** $d(I, \Delta)$ **là** khoảng cách từ I đến Δ. Ta có : $d(I, \Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

4. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PHÂN GIÁC



Phương trình hai đường phân giác của hai góc tạo bởi hai đường thẳng

$\Delta_1 : A_1x + B_1x + C_1 = 0$

và $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

là $d_{1,2} : \dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\dfrac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

d_1 theo dấu (+), d_2 theo dấu (−)).

Để xác định đường phân giác muốn tìm là d_1 hay d_2 ta tiến hành theo một trong hai cách sau :

- Đặt $\vec{n_1} = (A_1; B_1)$, $\vec{n_1} = (A_2; B_2)$.

Khi đó, nếu $\vec{n_1}.\vec{n_2} < 0$ thì d_1 là phân giác góc nhọn, d_2 là phân giác góc tù. Nếu $\vec{n_1}.\vec{n_2} > 0$ thì d_1 là phân giác góc tù; d_2 là phân giác góc nhọn.

- Nếu muốn tìm phân giác góc $\widehat{BAC}$ như trong hình vẽ thì phân giác muốn tìm là đường d có B và C nằm về hai phía của nó (thay tọa độ của B và C vào phương trình của một trong hai phương trình của d_1 hoặc d_2 là sẽ xác định được điều này).

- Phân giác của góc $\widehat{BAC}$ còn có thể tìm bằng hai cách khác sau đây :

– Đặt $\vec{e_1} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$; $\vec{e_2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ thì $\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ là vectơ chỉ phương của phân giác góc d, d là đường thẳng đi qua A có vectơ chỉ phương $\vec{a}$.

– Gọi D là chân của phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$. Vì $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ suy ra $\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC} \Rightarrow$ D chia đoạn BC theo tỷ số $k = \frac{AB}{AC}$. Từ đó ta tìm được tọa độ của D và d là đường thẳng đi qua hai điểm A và D.

5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng : $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

và $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Khi đó : Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ với } A_2, B_2, C_2 \neq 0.$$

Điều kiện : $\Delta_1 // \Delta_2$ còn được viết là $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$.

6. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng : $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$,

$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Ký hiệu : $(\widehat{\Delta_1; \Delta_2})$ là góc giữa Δ_1 và Δ_2. Ta có :

$$\cos(\widehat{\Delta_1; \Delta_2}) = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\Delta_1; \Delta_2}) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

(xem thêm 2.iii), phương trình đường thẳng theo hệ số góc).

7. CHÙM ĐƯỜNG THẲNG

Nếu chùm đường thẳng xác định bởi hai đường thẳng có phương trình $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ thì mọi đường thẳng của chùm có phương trình : $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, trong đó $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ (α và β không đồng thời bằng 0). Tuỳ theo điều kiện đòi hỏi của đề bài, ta có thể tìm được các hệ số α, β thích hợp.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : TÌM PHƯƠNG TRÌNH CỦA MỘT ĐƯỜNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Để lập phương trình của một đường (L), ta tìm điều kiện cần và đủ để $M(x; y) \in (L)$.

Sau đó biến đổi điều kiện này thành $F(x; y) = 0$ hoặc $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB với A(1; 3), B(–2; 4).

Giải

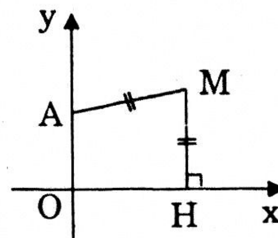
M(x; y) thuộc đường trung trực của AB $\Leftrightarrow$ MA = MB

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} \Leftrightarrow 3x - y + 5 = 0.$$

Ví dụ 2

Tìm phương trình của đường (L) gồm tập hợp các điểm cách đều trục hoành và điểm A(0; 1).

Giải



Giả sử $M(x; y) \in (L)$.

Hạ $MH \perp Ox$, ta có : $M \in (L) \Leftrightarrow MH = MA$

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

(L) là đường parabol nhận A làm tiêu điểm và trục hoành làm đường chuẩn.

Vấn đề 2 : LẬP PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Nếu biết một điểm thuộc đường thẳng thì cần xác định thêm một trong các yếu tố sau của đường thẳng đó.

– Vectơ chỉ phương.

– Vectơ pháp tuyến.

– Hệ số góc.

– Một điểm khác thuộc đường thẳng.

• Viết phương trình đường thẳng có dạng $x = x_0$ hoặc $y = ax + b$. Từ các giả thiết ta sẽ tìm được x_0 hoặc a, b.

• Viết phương trình đường thẳng có dạng $ax + by + c = 0$. Từ các giả thiết, ta cần tìm a, b, c.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 3

Cho hai điểm A(1; –3), B(–5; 1). Hãy viết phương trình đường trung trực của đoạn AB dưới các dạng khác nhau.

Giải

Đường trung trực d đi qua trung điểm I của AB :

I(–2; –1). $d \perp AB$ nên d có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (-6; 4)$, hay vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-3; 2)$. Từ đó suy ra d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 3)$. Vậy d có :

– Phương trình tham số : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$.

– Phương trình chính tắc : $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3}$.

– Phương trình tổng quát : $-3(x + 2) + 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 4 = 0$.

– Phương trình theo hệ số góc : $y = \frac{3}{2}x + 2$.

Ví dụ 4

Cho đường thẳng d : $2x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d_1 và d_2 đi qua điểm (–1; 2) lần lượt song song và vuông góc với d.

Giải

Ta viết d: $y = -2x + 3 = 0$, có hệ số góc $k = -2$

• Vì $d_1 // d$ nên d_1 có hệ số góc $k_1 = -2$ và có phương trình

$$y = -2(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = -2x.$$

• $d_2 \perp d$ nên d_2 có hệ số góc $k_2 = \frac{1}{2}$ (vì $k_2.k = -1$) và có phương trình là :

$$y = \frac{1}{2}(x+1)+2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

❑ **Phương pháp giải khác :**

Vì $d_1 // d$ nên d_1 : $2x + y + c = 0$.

Do d_1 đi qua điểm $(-1; 2)$ nên $-2 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = 0$.

Vậy $d_1 : 2x + y = 0$.

Vì $d_2 \perp d$ nên $d_2 : x - 2y + c = 0$.

Do d_2 đi qua điểm $(-1; 2)$ nên $-1 - 4 + c = 0 \Rightarrow c = 5$.

Vậy : $d_2 : x - 2y + 5 = 0$.

Vấn đề 3 : ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ TẠO VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC MỘT GÓC CHO TRƯỚC

A. PHƯƠNG PHÁP

Dựa vào công thức tính góc giữa hai đường thẳng.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 5

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(0; 1) và tạo với đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$ một góc 45^0.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN HÀ NỘI - 1999)

Giải

Đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$ có phương trình dạng hệ số góc là

$$d : y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Đường thẳng cần tìm đi qua A nên có dạng $\Delta : y = kx + 1$.

Vì $tg(d, \Delta) = \dfrac{k + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}k}$ và $(d, \Delta) = 45^0$ nên $\dfrac{k + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}k} = \pm 1 \Leftrightarrow k = -3, k = \dfrac{1}{3}$.

Ta được hai đường thẳng thỏa mãn các giả thiết của bài toán là :

$$y = -3x + 1; \quad y = \frac{1}{3}x + 1.$$

❐ Phương pháp giải khác :

Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng đã cho có dạng $2x - y + c = 0$.

Thay tọa độ của A vào, ta được $c = 1$. Vậy $d_1 : 2x - y + 1 = 0$.

Đường thẳng qua A song song với đường thẳng đã cho có dạng $x + 2y + c = 0$.

Thay tọa độ của A vào ta được $c = -2$. Vậy $d_2 : x + 2y - 2 = 0$.

Đường thẳng muốn tìm là các đường phân giác của các góc giữa d_1 và d_2 :

$$\frac{x + 2y - 2}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0, \quad x - 3y + 3 = 0.$$

Vấn đề 4 : TÌM ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT ĐIỂM QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Giả sử cho điểm M và đường thẳng d. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua d

- Lập phương trình đường thẳng Δ qua M, vuông góc với d.
- Tìm giao điểm I của d và Δ.
- Vì I là trung điểm của đoạn MM' nên $\begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M \\ y_{M'} = 2y_I - y_M \end{cases}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 6

Cho d : x – 2y + 2 = 0 và điểm M(1; 4). Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua d.

Giải

Δ qua M, vuông góc với d có phương trình dạng 2x + y + c = 0, thay tọa độ M vào ta được c = –6

Vậy Δ : 2x + y – 6 = 0.

Giao điểm I của d và Δ : $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(2; -2)$

Từ đó : $x_{M'} = 2x_I - x_M = 2.\ 2 - 1 = 3;$

$y_{M'} = 2y_I - y_M = 2.2 - 4 = 0.$ Vậy M' (3; 0).

❑ **Chú ý** : *Điểm I cũng chính là hình chiếu của M trên d. Ta suy ra cách tìm tọa độ của hình chiếu của M : Lập phương trình đường thẳng qua M, vuông góc với d. Giao điểm của hai đường thẳng là hình chiếu muốn tìm.*

Vấn đề 5 : KHOẢNG CÁCH GIỮA MỘT ĐIỂM VÀ MỘT ĐƯỜNG THẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Đưa bài toán về việc tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng. Áp dụng công thức để có kết quả.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 7

Cho tam giác ABC có A(2; 4); B(2; –1), C(–1; 3). Tính diện tích của tam giác.

Giải

Độ dài BC = $\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. Muốn tính S_{ABC} ta cần biết thêm chiều cao AH, AH = d(A, BC).

BC : $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0$

$$AH = \frac{|4.2 + 3.4 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 3.$$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}.5.3 = \frac{15}{2}$.

Vấn đề 6 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

A. PHƯƠNG PHÁP

Phân giác của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là đường thẳng đi qua điểm A, có vectơ chỉ phương $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$. Các phương pháp khác xem ở mục 4 phần tóm tắt lý thuyết.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 8

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với A(–6; –3), B(–4; 3), C(9; 2). Viết phương trình đường thẳng d chứa phân giác của góc $\widehat{A}$.

(ĐỀ THI ĐHSP HÀ NỘI 2, KHỐI A – 1999)

Giải

❑ **Cách 1** : $\overrightarrow{AB} = (2; 6)$, chuẩn hóa ta được : $\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

$\overrightarrow{AC} = (15; 5)$, chuẩn hóa ta được : $\vec{f} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

Từ đó một vecơ chỉ phương của phân giác trong góc $\widehat{A}$ là :

$$\vec{e} + \vec{f} = \left(\frac{4}{\sqrt{10}}; \frac{4}{\sqrt{10}}\right) \text{ hay } (1; 1).$$

Vậy d : $\frac{x+6}{1} = \frac{y+3}{1} \Leftrightarrow y = x + 3$.

❑ **Cách 2** : AB : $\frac{x+6}{2} = \frac{y+3}{3} \Leftrightarrow 3x - y + 15 = 0$, $\vec{n_1} = (3, -1)$;

AC : $\frac{x+6}{15} = \frac{y+3}{5} \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0$, $\vec{n_2} = (1, -3)$.

Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = 60 > 0$ nên góc $\widehat{A}$ nhọn.

Vì $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 6 > 0$ nên phân giác trong của $\widehat{A}$ (tức phân giác của góc nhọn) là $3x - y + 15 = -(x - 3y - 3) \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$.

□ **Cách 3 :** Hai đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{A}$ là :

$$3x - y + 15 = \pm(x - 3y - 3)$$

$$\Leftrightarrow d_1 : x + y + 9 = 0 \text{ hoặc } d_2 : x - y + 3 = 0.$$

Thay tọa độ của B và C vào phương trình của d_1, ta được :

$$-4 + 3 + 9 = 8 > 0; \quad 9 + 2 + 9 = 20 > 0.$$

Suy ra B và C nằm cùng phía đối với d_1.

Vậy phân giác của $\widehat{BAC}$ là $d_2 : x - y + 3 = 0$.

□ **Cách 4 :** Gọi D là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{A}$. Khi đó D chia đoạn BC theo tỷ số $k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{10}} = -\frac{2}{5}$.

Vậy tọa độ của D là : $x_D = \dfrac{x_B - kx_C}{1 - k} = \dfrac{-4 + \frac{18}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = -\dfrac{2}{7}$,

$$y_D = \frac{y_B - ky_C}{1 - k} = \frac{3 + \frac{4}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{19}{7}.$$

Phân giác trong của góc $\widehat{A}$ là : $AD : \dfrac{x + 6}{-\frac{2}{7} + 6} = \dfrac{y + 3}{\frac{11}{7} + 3} \Leftrightarrow x - y + 3 = 0.$

Vấn đề 7 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG THUỘC MỘT CHÙM ĐƯỜNG THẲNG

Ví dụ 9

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết phương trình ba cạnh là :

$AB : 2x - y + 2 = 0$; $BC : 2x - 3y - 6 = 0$; $CA : 10x + 7y - 70 = 0$.

Viết phương trình đường cao AH của tam giác ABC mà không cần tìm tọa độ của đỉnh A. Tương tự, hãy viết phương trình đường cao BH mà không cần tìm tọa độ điểm B.

Giải

Đường cao AH thuộc chùm đường thẳng xác định bởi hai đường thẳng AB và CA đồng thời vuông góc với đường thẳng BC. Do đó đường thẳng AH có phương trình dạng :

$$\alpha(2x - y + 2) + \beta(10x + 7y - 70) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + 10\beta)x - (\alpha - 7\beta)y + 2\alpha - 70\beta = 0 \qquad (1)$$

Vì $AH \perp BC$ nên phương trình trên cần thỏa mãn điều kiện :

$$2(2\alpha + 10\beta) + 3(\alpha - 7\beta) = 0 \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra $7\alpha - \beta = 0$. Chọn $\alpha = 1$, ta có $\beta = 7$.

Vậy đường cao AH có phương trình $9x + 6y - 61 = 0$.

Tương tự, đường cao BH có phương trình dạng

$$(2\alpha + 2\beta)x - (\alpha + 3\beta)y + 2\alpha - 69 = 0 \text{ với điều kiện :}$$

$$10(2\alpha + 2\beta) + 7(-\alpha - 3\beta) = 0 \Rightarrow 13\alpha - \beta = 0.$$

Chọn $\alpha = 1$, ta có $\beta = 13$.

Vậy đường cao BH có phương trình là : $7x - 10y - 19 = 0$.

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

Lập phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC biết đỉnh A(3; –4) và hai đường cao là : $7x - 2y - 1 = 0$ và $2x - 7y - 6 = 0$.

Giải

Thay tọa độ của A vào phương trình của hai đường cao, ta thấy không thỏa mãn. Vậy 2 đường cao đó thuộc đỉnh B và C. Giả sử BI : $7x - 2y - 1 = 0$, CK : $2x - 7y - 6 = 0$. Cạnh AB nằm trên đường thẳng đi qua A, vuông góc với CK nên có vectơ chỉ phương là (2; –7).

Vậy AB : $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{-7} \Leftrightarrow 7x + 2y - 13 = 0$.

Tương tự cạnh AC nằm trên đường thẳng đi qua A, vuông góc với BI nên vectơ chỉ phương (7; –2).

Vậy AC : $\dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y+4}{-2} \Leftrightarrow 2x + 7y + 22 = 0$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 7x - 2y - 1 = 0 \\ 7x + 2y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 3)$

Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 7y + 22 = 0 \\ 2x - 7y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-4; -2)$

Vậy BC : $\dfrac{x-1}{-4-1} = \dfrac{y-3}{-2-3} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

Ta được phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác lần lượt là

$$7x + 2y - 13 = 0; \quad 2x + 7y + 22 = 0; \quad x - y + 2 = 0.$$

Bài 2

Cho tam giác ABC có ba đỉnh A(5; 6), B(–3; 2), C(2; –3).

a) Lập phương trình đường cao AA' và BB'.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

c) Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

a) Vì $AA' \perp BC$ nên đường thẳng AA' đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{BC} = (5; -5)$.

Từ đó : $AA' : 5(x - 5) - 5(y - 6) = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

Tương tự, BB' có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AC} = (-3; -9)$

$$BB' : -3(x + 3) - 9(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 3 = 0.$$

b) Trực tâm H là giao điểm của AA' và BB'

$$H : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 3y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(0; 1)$$

c) Ta cần tính cạnh BC và đường cao AA' :

$$BC = \sqrt{(2 + 3)^2 + (-3 - 2)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Phương trình của BC : $\dfrac{x + 3}{2 + 3} = \dfrac{y - 2}{-3 - 2} \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$

$$AA' = d(A, BC) = \frac{|5 + 6 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AA' = \frac{1}{2}.5\sqrt{2}.6\sqrt{2} = 30.$$

Bài 3

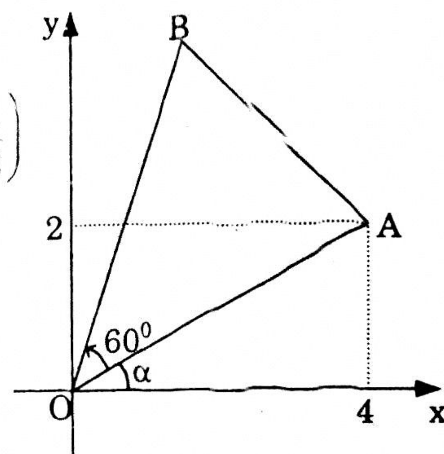
Cho điểm A(4; 2). Tìm điểm B sao cho :

a) OAB là tam giác đều, $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 60^0$.

b) OAB là tam giác cân, $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 45^0$.

Giải

a) Ký hiệu như trong hình vẽ, ta có :



$tg(OX; OA) = tg(\alpha + 60^0)$

$$= \frac{tg\alpha + tg60^0}{1 - tg\alpha tg60^0} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \left(\text{vì } tg\alpha = \frac{1}{2}\right)$$

Từ đó OB : $y = \dfrac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} x$.

Giả sử $B\left(x_0; \dfrac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} x_0\right)$.

Khi đó : $OA = OB \Leftrightarrow x_0^2 + \left(\dfrac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} x_0\right)^2 = 20 \Leftrightarrow x_0^2 = (2 - \sqrt{3})^2$

Vì $y_0 > 0$ nên $x_0 > 0$, tức là $x_0 = 2 - \sqrt{3}$ và tọa độ của $B(2 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$.

b) Ký hiệu như trong hình vẽ

$tg(Ox, OB) = tg(\alpha + 45^0) = \dfrac{tg\alpha + 1}{1 - tg\alpha} = 3$

Từ đó OB : y = 3x

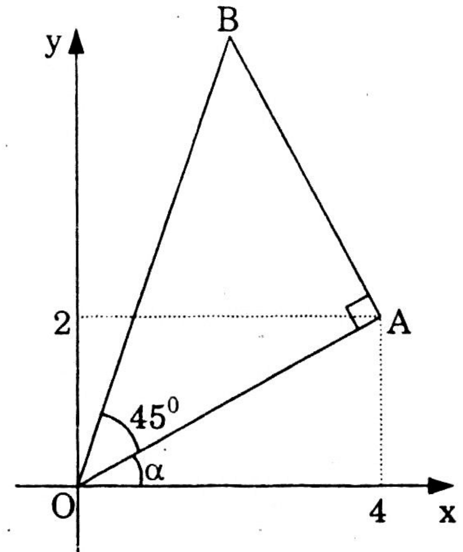
AB đi qua A và vuông góc với OA nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{OA} = (4; 2)$.

Vậy AB : 4(x − 4) + 2(y − 2) = 0

⇔ 2x + y − 10 = 0

B là giao điểm OB và AB nên

$$B : \begin{cases} y = 3x \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 6).$$



Bài 4

Lập phương trình hai đường thẳng d_1 và d_2 theo thứ tự đi qua A(0; 4) và B(5; 0), biết rằng phân giác của một trong các góc tạo bởi d_1 và d_2 là d có phương trình 2x − 2y + 1 = 0.

Giải

Điểm A' đối xứng với A qua d thuộc d_2. Từ đó ta suy ra cách giải : Tìm tọa độ của A'; d_2 chính là đường thẳng qua B, A'. Tìm giao điểm M của d và d_2; d_1 chính là đường thẳng qua A, M.

Gọi I là giao điểm của AA' và d.

AA' đi qua A(0; 4) và vuông góc với d nên có vectơ chỉ phương là (2; −2).

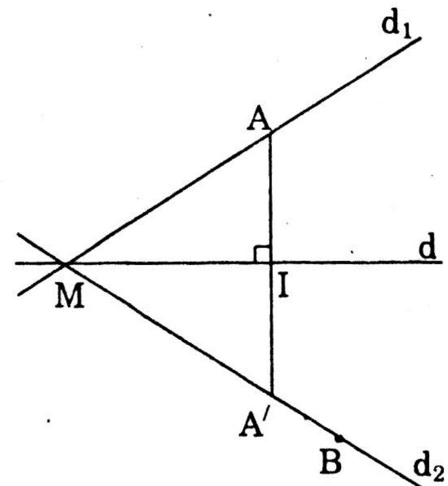
Từ đó AA' : $\dfrac{x - 0}{2} = \dfrac{y - 4}{-2} \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$

$$I : \begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right).$$

Từ đó : $x_{A'} = 2x_I - x_A = 2.\dfrac{7}{4} - 0 = \dfrac{7}{2}$

$y_{A'} = 2y_I - y_A = 2.\dfrac{9}{4} - 4 = \dfrac{1}{2}.$

Vậy $A'\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$



$$d_2 \equiv A'B : \frac{x - 5}{\frac{7}{2} - 5} = \frac{y - 0}{\frac{1}{2} - 0} \Leftrightarrow x + 3y - 5 = 0$$

$$M : \begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M\left(\frac{7}{8}; \frac{11}{8}\right)$$

$$d_2 \equiv MA : \frac{x - 0}{\frac{7}{8}} = \frac{y - 4}{\frac{11}{8} - 4} \Leftrightarrow 3x - y + 4 = 0.$$

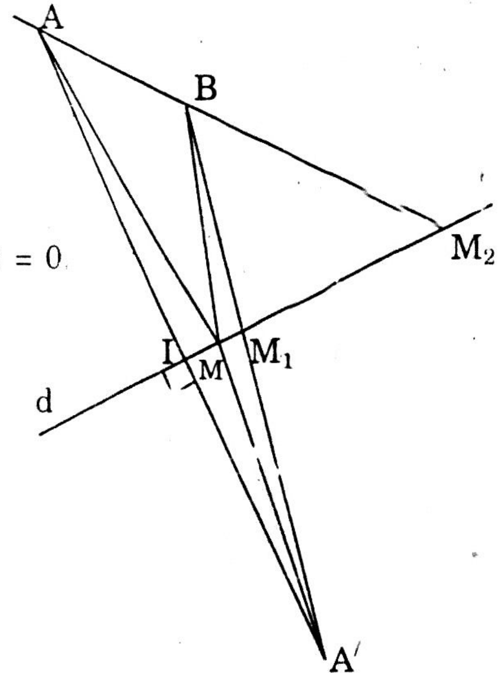
Ta có kết quả : $d_1 : x + 3y - 5 = 0$; $d_2 : 3x - y + 4 = 0$.

Bài 5

Cho đường thẳng d : $x - 2y + 2 = 0$ và hai điểm A(0; 6), B(2; 5). Tìm điểm M trên d sao cho :

a) MA + MB nhỏ nhất. b) |MA – MB| lớn nhất.

Giải



a) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d.

Khi đó : MA + MB = MA' + MB ≥ A'B

Gọi M_1 là giao điểm của A'B và d thì :

$\min(MA + MB) \equiv M_1A + M_1B$

Ta tìm M_1; AA' : $\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 6}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$

Giao điểm I của AA' và d :

$$I : \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(2;2)$$

$x_{A'} = 2x_I - x_A = 2.2 - 0 = 4$

$y_{A'} = 2y_I - y_A = 2.2. - 6 = -2$

$\Rightarrow A'(4; -2)$

$$BA' : \frac{x - 2}{4 - 2} = \frac{y - 5}{-2 - 5} \Leftrightarrow 7x + 2y - 24 = 0.$$

$$M_1 : \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 7x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1\left(\frac{11}{4}; \frac{19}{8}\right).$$

b) Ta có |MA – MB| ≤ AB, gọi M_2 là giao điểm của AB và d thì

max |MA – MB| = $|M_2A - M_2B|$. Ta tìm tọa độ điểm M_2

$$AB : \frac{x - 0}{2} = \frac{y - 6}{-1} \Leftrightarrow x + 2y - 12 = 0.$$

$$M_2 : \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_2\left(5; \frac{7}{2}\right).$$

Bài 6

Cho đường thẳng d : $(1 + 2m)x - (2 + 3m)y + 7 + 12m = 0$.

a) Chứng tỏ rằng khi m thay đổi, d luôn luôn đi qua một điểm cố định.

b) Xác định m để d song song với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 12 = 0$. Tìm khoảng cách giữa d và Δ.

Giải

a) Viết lại phương trình của d dưới dạng chùm đường thẳng :

$$(2x - 3y + 12)m + (x - 2y + 7) = 0$$

Chùm đường thẳng này được xác định bởi đường thẳng $2x - 3y + 12 = 0$ và đường thẳng $x - 2y + 7 = 0$.

Hệ $\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ nên điểm $(-3; 2)$ luôn thuộc đường thẳng d khi m thay đổi.

b) Để Δ // d phải có $\dfrac{1 + 2m}{3} = \dfrac{-(2 + 3m)}{-4} \neq \dfrac{7 + 12m}{-12}$.

- $\dfrac{1 + 2m}{3} = \dfrac{-(2 + 3m)}{-4} \Leftrightarrow m = -2$.
- Với $m = -2 : -1 = -1 \neq \dfrac{17}{12}$.

Vậy $m = -2$ thì Δ // d.

Điểm $M(-3; 2)$ thuộc d.

$$d(\Delta, d) = d(M, \Delta) = \frac{|3(-3) - 4.2 - 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{29}{5}.$$

Bài 7

Cho tam giác ABC cân tại A (AB = AC). Biết cạnh BC có phương trình $2x - 3y - 5 = 0$; cạnh AB có phương trình : $x + y + 1 = 0$; cạnh AC đi qua điểm $M(1; 1)$. Viết phương trình cạnh AC.

Giải

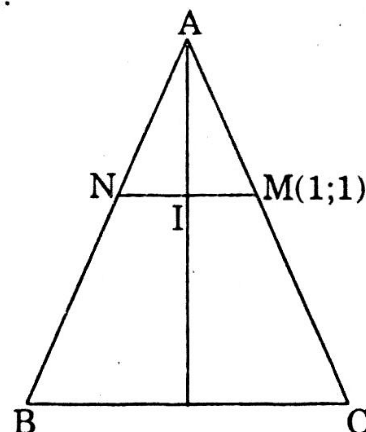
Giả sử đường thẳng qua M song song với BC cắt AB tại N. Gọi I là trung điểm của MN thì AI ⊥ BC. Từ đây viết được phương trình của AI; A là giao điểm của AI và AB, AC chính là đường thẳng qua A và M.

Đường thẳng qua M song song với BC có phương trình : $2x - 3y + c = 0$.

Thay tọa độ của M vào ta được $2 - 3 + c = 0 \Rightarrow c = 1$.

Vậy được phương trình $2x - 3y + 1 = 0$.

Giao điểm N của đường này và cạnh AB có tọa độ :



$N : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y = 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{1}{5}\right)$.

Trung điểm I của MN có tọa độ :

$$x_I = \frac{-\frac{4}{5} + 1}{2} = \frac{1}{10};\ y_I = \frac{-\frac{1}{5} + 1}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow I\left(\frac{1}{10}; \frac{2}{5}\right)$$

Đường thẳng AI qua I, vuông góc với BC nên có phương trình

$$AI : \frac{x - \frac{1}{10}}{2} = \frac{y - \frac{2}{5}}{-3} \Leftrightarrow 30x + 20y - 11 = 0$$

$$A : \begin{cases} 30x + 20y - 11 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{31}{10}; -\frac{41}{10}\right)$$

$$AC \equiv AM : \frac{x - 1}{\frac{31}{10} - 1} = \frac{y - 1}{-\frac{41}{10} - 1} \Leftrightarrow 17x + 7y - 24 = 0$$

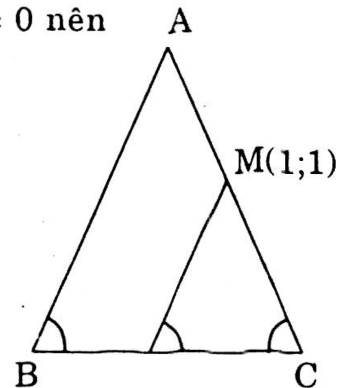
Vậy ta có : $17x + 7y - 24 = 0$ là phương trình của đường thẳng chứa cạnh AC.

❑ **Phương pháp giải khác**

Qua M kẻ đường thẳng song song với AB.

Khi đó AC là một trong hai đường thẳng đi qua M tạo với BC góc bằng góc $\widehat{B}$ (đường thẳng còn lại song song với AB). Từ đó ta có phương pháp giải :

$\widehat{B}$ là góc giữa AB : $x + y + 1 = 0$ và BC : $2x - 3y - 5 = 0$ nên



$$\cos\widehat{B} = \frac{|1.2 + 1.(-3)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Gọi k là hệ số góc của AC muốn tìm, khi đó :

AC : $y = k(x - 1) + 1 \Leftrightarrow kx - y + 1 - k = 0$

và $$\cos\widehat{C} = \frac{|k.2 + (-1).(-3)|}{\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2k + 3|}{\sqrt{13(k^2 + 1)}}$$

Vì $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên $$\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{|2k + 3|}{\sqrt{13(k^2 + 1)}} \Leftrightarrow k^2 + 1 = 2(2k + 3)^2.$$

$$\Leftrightarrow 7k^2 + 24k + 17 = 0 \Leftrightarrow k = -1, k = -\frac{17}{7}.$$

- Vì hệ số góc của AB là -1 nên $k = -1$ thì đường thẳng song song với AB, ta loại trường hợp này.
- Với $k = -\frac{17}{7}$ ta có AC : $y = -\frac{17}{7}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow 17x + 7y - 24 = 0.$

Bài 8

> Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu $B(-4; -5)$ và hai đường cao có phương trình lần lượt là : $5x + 3y - 4 = 0$, $3x + 8y + 13 = 0$.

Giải

Vì $5(-4) + 3(-5) - 1 = -39 \neq 0$; $3(-4) + 8(-5) + 13 = -39 \neq 0$

nên hai đường cao nói trên không qua đỉnh B.

Giả sử : AH : $5x + 3y - 4 = 0$; CK : $3x + 8y + 13 = 0$

AB qua B và vuông góc với CK nên có phương trình

$$AB : \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{8} \Leftrightarrow 8x - 3y + 17 = 0$$

BC qua B vuông góc với AH nên có phương trình

$$BC : \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{3} \Leftrightarrow 3x - 5y - 13 = 0.$$

A là giao điểm của AB và AH

$$A : \begin{cases} 8x - 3y + 17 = 0 \\ 5x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3)$$

C là giao điểm của BC và CK.

$$C : \begin{cases} 3x - 5y - 13 = 0 \\ 3x + 8y + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1; -2)$$

Vậy $AC : \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y+2}{3+2} \Leftrightarrow 5x + 2y - 1 = 0.$

Bài 9

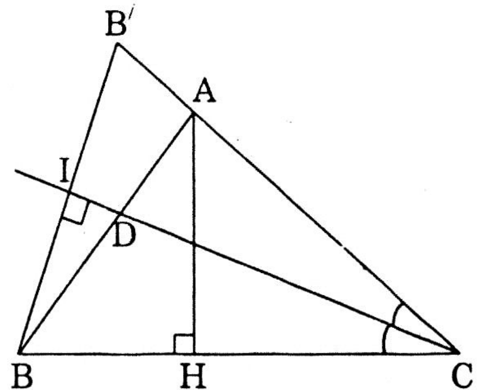
Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu B(2; –1), đường cao và đường phân giác trong qua hai đỉnh A, C lần lượt có phương trình là :

$$3x - 4y + 27 = 0; \qquad x + 2y - 5 = 0.$$

Giải

Ký hiệu như trong hình vẽ. Đường thẳng BC đi qua B, vuông góc với đường cao AH nên ta có :

$$BC : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0.$$



Gọi B' là điểm đối xứng với B qua CD, BB' ⊥ CD

$$BB' : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$$

$$I : \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(3; 1)$$

$$B' : \begin{cases} x_{B'} = 2x_I - x_B = 2.3 - 2 = 4 \\ y_{B'} = 2y_I - y_B = 2.1 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(4; 3)$$

$$C : \begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 3)$$

$AC \equiv B'C$, $\overrightarrow{BC} = (-5, 0)$, $B'C : 0(x - 4) + 5(y - 3) = 0.$

Vậy $AC : y - 3 = 0$

A là giao điểm của AH và AC

$$A : \begin{cases} 3x - 4y + 27 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-5; 3).$$

Từ đó, ta suy ra phương trình của AB là :

$$AB : \frac{x+5}{2+5} = \frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow 4x + 7y - 1 = 0.$$

Vậy ba cạnh của tam giác ABC có phương trình là :

$$AB : 4x + 7y - 1 = 0; \quad BC : 4x + 3y - 5 = 0; \quad CA : y - 3 = 0$$

Bài 10

Cho hai đường thẳng $d_1 : 3x + 4y - 2 = 0$ và $d_2 = 3x - 4y + 3 = 0$. Tìm tập hợp (L) các điểm có khoảng cách đến d_1 gấp đôi khoảng cách đến d_2.

Giải

$$M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow d(M, d_1) = 2d(M, d_2) \Leftrightarrow \frac{|3x + 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2|3x - 4y + 3|}{\sqrt{3^3 + 4^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 4y - 2 = 2(3x - 4y + 3) \\ 3x + 4y - 2 = -2(3x - 4y + 3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 12y + 8 = 0 \\ 9x - 4y + 4 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy (L) là tập hợp các điểm của hai đường thẳng có phương trình trên.

Bài 11

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(4; 1) và tạo với hai nửa trục dương Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 9.

Giải

Giả sử đường thẳng qua A cắt Ox tại M(a; 0) và Oy tại N(0; b). Khi đó $a > 0, b > 0$ và phương trình đường thẳng là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Vì A(4; 1) thuộc đường thẳng nên $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{a}{a-4}$ $(a > 4)$

$$S_{MON} = \frac{1}{2}OM.ON = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\frac{a^2}{a-4}$$

$$S_{MON} = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{a^2}{a-4} = 9 \Leftrightarrow a^2 - 18a + 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = 12 \end{array}\right.$$

- $a = 6 \Rightarrow b = 3$. Ta được phương trình đường thẳng là :

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0.$$

- $a = 12 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$. Ta được phương trình đường thẳng là :

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1 \Leftrightarrow x + 8y - 12 = 0.$$

Bài 12

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : 4x - 3y - 12 = 0; \quad \Delta_2 : 4x + 3y - 12 = 0.$$

a) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác có các cạnh lần lượt nằm trên các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và trục tung.

b) Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác nói trên.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC HUẾ, KHỐI D, 1997)

Giải

a) Các đỉnh nằm trên trục tung có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4x - 3y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0; -4)$$

Và $$\begin{cases} x = 0 \\ 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; 4)$$

Đỉnh là giao điểm của Δ_1, Δ_2 có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 4x - 3y - 12 = 0 \\ 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3; 0).$$

b) Tam giác ABC cân (vì CA = CB), do vậy tâm I nằm trên trục hoành, I(a; 0), a > 0. Vì OI = d (I, Δ_1) nên $a = \dfrac{|4a - 12|}{5}$.

- $a = \dfrac{4a - 12}{5} \Rightarrow a = -12$ (loại).
- $a = \dfrac{-4a + 12}{5} \Rightarrow a = \dfrac{4}{3}$.

Vậy đường tròn nội tiếp có tâm $I\left(\dfrac{4}{3}; 0\right)$, bán kính $r = \dfrac{4}{3}$.

Bài 13

Trong mặt phẳng Oxy viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d : 3x – 4y + 1 = 0 và có khoảng cách đến d bằng 1.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC HUẾ - KHỐI D - 1998)

Giải

Đường thẳng Δ song song với d nên có dạng : $3x - 4y + m = 0$.

Dễ thấy điểm A(1, 1) thuộc d nên ta có :

$$d(A, \Delta) = \frac{|3 - 4 + m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 \Leftrightarrow m = -4, m = 5$$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm của bài toán là :

$$3x - 4y - 4 = 0; \quad 3x - 4y + 5 = 0.$$

Bài 14

> Trong mặt phẳng tọa độ cho các điểm P(2; 3), Q(4; −1) và R(−3; 5) lần lượt là trung điểm các cạnh của một tam giác. Hãy lập phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác đó.
>
> (ĐỀ THI ĐHQG HÀ NỘI - KHỐI A - 1995)

Giải

Giả sử P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác. Vì BC // QR nên BC có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{QR} = (-7; 6)$. BC đi qua P nên có phương trình là :

$$BC : \frac{x-2}{-7} = \frac{y-3}{6} \Leftrightarrow 6x + 7y - 33 = 0$$

Tương tự, ta có : CA : $2x + 5y - 3 = 0$; AB : $2x + y + 1 = 0$.

Bài 15

> Cho tam giác ABC có M(−2; 2) là trung điểm cạnh BC. Cạnh AB có phương trình là $x - 2y - 2 = 0$, cạnh AC có phương trình là $2x + 5y + 3 = 0$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác.
>
> (ĐỀ THI ĐẠI HỌC TÀI CHÍNH KẾ TOÁN HÀ NỘI - 1996)

Giải

Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{4}{9}; -\frac{7}{9}\right)$$

Đường thẳng qua M song song với AB có phương trình dạng $x - 2y + c = 0$. Thay tọa độ M vào ta được $c = 6$. Vậy phương trình đường thẳng qua M, song song với AB là $x - 2y + 6 = 0$.

Từ đó, tọa độ trung điểm N của AC là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow N(-4; 1)$$

Vì $x_N = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 2x_N - x_A = -\dfrac{76}{9}$

$y_N = \dfrac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 2y_N - y_A = \dfrac{25}{9}$.

Vậy : $C\left(-\dfrac{76}{9}; \dfrac{25}{9}\right)$.

Tương tự : $x_B = 2x_M - x_C = -4 + \dfrac{76}{9} = \dfrac{40}{9}$; $y_B = 2y_M - y_C = 4 - \dfrac{25}{9} = \dfrac{11}{9}$

Vậy : $B\left(\dfrac{40}{9}; \dfrac{11}{9}\right)$.

Bài 16

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm A(2; 1), B(0; 1), C(3; 5), D(–3; –1).

a) Tính diện tích tứ giác ABCD.

b) Viết phương trình các cạnh của hình vuông có hai cạnh song song đi qua A, C và hai cạnh song song còn lại đi qua B, D.

(ĐỀ THI ĐHSP HÀ NỘI II - 1997)

Giải

a) Vì A và B có cùng tung độ nên AB // Ox. Từ đó :

$$d(C, AB) = |y_C - y_A| = 4$$

$$d(D, AB) = |y_D - y_A| = 2$$

$$AB = |x_A - x_B| = 2$$

C và D nằm về phía đối với AB, do đó :

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ABD} = \frac{4.2}{2} + \frac{2.2}{2} = 6.$$

b) Các đường thẳng đi qua A, C song song với trục tung có khoảng cách là 1; các đường thẳng đi qua B, D song song với trục hoành có khoảng cách là 2 nên chúng không tạo thành một hình vuông. Do vậy ta có thể xét các đường thẳng đi qua A, C song song với nhau dạng :

$$D_1 : y = k(x - 2) + 1; \qquad D_2 : y = k(x - 3) + 5$$

và các đường thẳng đi qua B, D vuông góc với cặp đường thẳng nói trên dạng

$$\Delta_1 : y = -\frac{1}{k}(x - 0) + 1; \qquad \Delta_2 : y = -\frac{1}{k}(x + 3) - 1.$$

Để bốn đường thẳng này tạo thành một hình vuông cần phải có :

$$d(A, D_2) = d(B, \Delta_2); \qquad D_2 : kx - y + 5 - 3k = 0$$

$$\Delta_2 : x + ky + k + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-k + 4|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} \Leftrightarrow (k - 4)^2 = (2k + 3)^2 \Leftrightarrow k = -7; k = \frac{1}{3}$$

Vậy bài toán có hai lời giải :

- $D_1 : y = -7x + 15; \qquad D_2 : y = -7x + 26$

  $\Delta_1 : y = \frac{1}{7}x + 1; \qquad \Delta_2 : y = \frac{1}{7}x - \frac{4}{7}.$

- $D_1 : y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}; \qquad D_2 = \frac{1}{3}x + 4$

  $\Delta_1 : y = -3x + 1; \qquad \Delta_2 : y = -3x - 10.$

Bài 17

Cho đường thẳng Δ: $4x + 2y - 13 = 0$. Hãy tìm đường thẳng d_2 đối xứng với đường thẳng $d_1 : x + y - 3 = 0$ qua Δ.

Giải

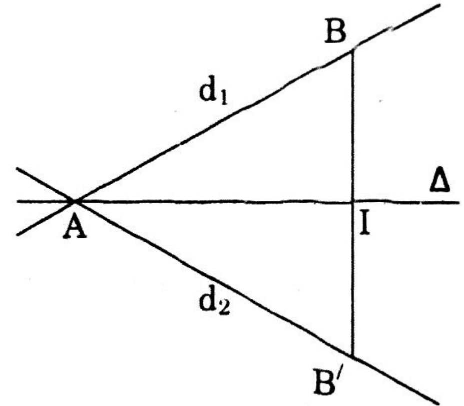
Nếu d_1 cắt Δ tại A thì A thuộc d_2

Nếu d_1 chứa B thì điểm B' đối xứng với B qua Δ thuộc d_2.

Do đó, ta có cách giải sau đây :

Giao điểm A của Δ và d_1 có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x + 2y - 13 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$



Trong phương trình của d_1 cho $x = 0 \Rightarrow y = 3$.

Vậy $B(0; 3) \in d_1$

Ta sẽ tìm B' đối xứng B qua Δ

Đường thẳng qua B vuông góc với Δ:

$$\frac{x-0}{4} = \frac{y-3}{2} \Leftrightarrow x - 2y + 6 = 0.$$

Giao điểm I của BB' với Δ: $\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 4x + 2y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{5}; \frac{37}{10}\right).$

Từ đó : $x_{B'} = 2x_I - x_B = 2.\frac{7}{5} - 0 = \frac{14}{5}$

$$y_{B'} = 2y_I - y_B = 2.\frac{37}{10} - 3 = \frac{22}{5}$$

$$d_2 \equiv AB' : \frac{x - \frac{7}{2}}{\frac{14}{5} - \frac{7}{2}} = \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{22}{5} + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow 7x + y - 24 = 0.$$

Bài 18

Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu A(1; 3) và hai đường trung tuyến có phương trình là $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$.

Giải

Dễ dàng thử thấy A không thuộc hai trung tuyến đã cho. Ta có thể coi trung tuyến CP : $x - 2y + 1 = 0$ và trung tuyến BN : $y - 1$. Ký hiệu G là trọng tâm của tam giác ABC.

$$G\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1; 1).$$

Nối AG, kéo dài cắt BC tại M và đặt trên đường thẳng này MG' = MG. Khi đó BGCG' là hình bình hành và GA = GG'.

Ta có : $x_G = \frac{x_{G'} + x_A}{2} \Rightarrow x_{G'} = 2x_G - x_A = 2 - 1 = 1$

$$y_G = \frac{y_{G'} + y_A}{2} \Rightarrow y_{G'} = 2y_G - y_A = 2 - 3 = -1.$$

Vậy G' (1; –1).

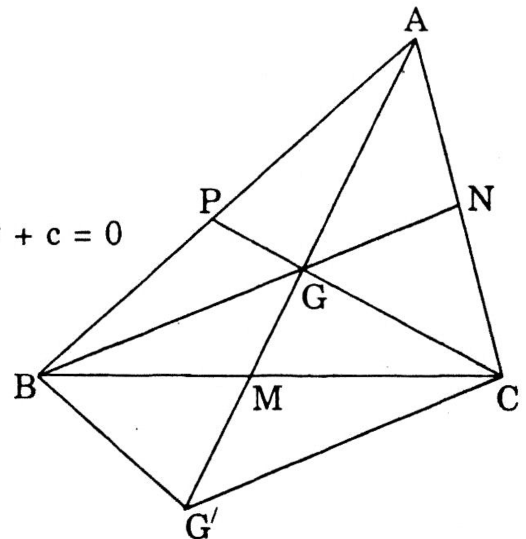
G'B // CP nên phương trình G'B có dạng : x – 2y + C = 0

Đường này đi qua G' nên : 1 – 2 (–1) + C = 0 ⇒ C = 3

Vậy G'B : x – 2y – 3 = 0

B là giao điểm của BN và G'B nên :

$$B : \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(5; 1)$$



G'C // BN nên phương trình G'C có dạng : y + c = 0

Đường này đi qua G' nên : – 1 + c = 1.

Vậy G'C : y + 1 = 0

C là giao điểm của G'C và CP nên :

$$C: \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-3; -1)$$

Từ đó; $AB : \dfrac{x-1}{5-1} = \dfrac{y-3}{1-3} \Rightarrow AB : x - 2y - 7 = 0.$

$AC : \dfrac{x-1}{-3-1} = \dfrac{y-3}{-1-3} \Rightarrow AC : x - y + 2 = 0.$

$BC : \dfrac{x-5}{-3-5} = \dfrac{y-1}{-1-1} \Rightarrow BC : x - 4y - 1 = 0.$

Bài 19

Cho tam giác ABC có đỉnh B(1; 2). Đường phân giác trong AD của góc $\widehat{A}$ có phương trình là : x – y – 3 = 0. Đường trung tuyến CM qua đỉnh C có phương trình là x + 4y + 9 = 0. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Giải

Qua B dựng đường thẳng vuông góc với đường phân giác AD, cắt AD tại I, cắt BC tại K. Gọi N là trung điểm của BI. Vì MN // AD nên nếu biết tọa độ điểm N sẽ tìm được phương trình của MN. Từ đó ta sẽ tìm được tọa độ điểm M (là giao điểm của MN và CM).

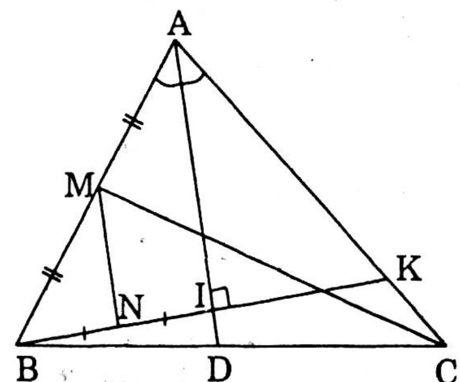
Do đó ta lập được phương trình cạnh AB, từ đó tìm được tọa độ điểm A. Biết A và K ta sẽ có phương trình cạnh AC.

Từ đó tìm được C và phương trình cạnh BC.

$BK : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$

$$I : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\,(3\,;0)$$

$$K : \begin{cases} x_K = 2x_I - x_B = 5 \\ y_K = 2y_I - y_B = -2 \end{cases} \Rightarrow K\,(5; -2)$$



$$N : \begin{cases} x_N = \dfrac{x_B + x_I}{2} = 2 \\ y_N = \dfrac{y_B + y_I}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow N(2; 1)$$

MN : $1(x - 2) - 1.(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$

$$M : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + 4y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1; -2).$$

- AB ≡ AM : $\dfrac{x - 1}{-1 - 1} = \dfrac{y - 2}{-2 - 2} \Leftrightarrow 2x - y = 0$

$$A : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3; -6).$$

- AC ≡ AK : $\dfrac{x + 3}{5 + 3} = \dfrac{y + 6}{-2 + 6} \Leftrightarrow x - 2y - 9 = 0$

$$C : \begin{cases} x - 2y - 9 = 0 \\ x + 4y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3; -3).$$

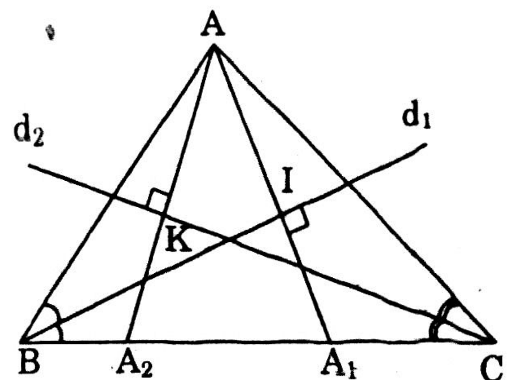
- BC : $\dfrac{x - 1}{3 - 1} = \dfrac{y - 2}{-3 - 2} \Leftrightarrow 5x + 2y - 9 = 0.$

Bài 20

Cho tam giác ABC có $A\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$, hai đường phân giác trong vẽ từ B và C lần lượt là $d_1 : x - 2y - 1 = 0$ và $d_2 : x + 3y - 1 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác đã cho.

Giải

Gọi A_1, A_2 lần lượt là các điểm đối xứng của A qua d_1, d_2. Khi đó A_1, A_2 thuộc đường thẳng BC.



Từ đó, ta có cách giải :

AA_1 : $\dfrac{x - \frac{4}{5}}{1} = \dfrac{y - \frac{7}{5}}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$

$$I : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{7}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$$

- A_1 : $\begin{cases} x_{A_1} = 2x_I - x_A = 2.\dfrac{7}{5} - \dfrac{4}{5} = 2 \\ y_{A_1} = 2y_I - y_A = 2.\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5} = -1 \end{cases} \Rightarrow A_1 (2; -1)$

AA_2 : $\dfrac{x - \frac{4}{5}}{1} = \dfrac{y - \frac{7}{5}}{3} \Leftrightarrow 3x - y - 1 = 0$

$K: \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

- $A_2: \begin{cases} 2x_K - x_A = 2.\frac{2}{5} - \frac{4}{5} = 0 \\ 2y_K - y_A = 2.\frac{1}{5} - \frac{7}{5} = -1 \end{cases} \Rightarrow A_2(0; -1)$

Vì A_1, A_2 đều có tung độ là -1 nên $BC \equiv A_1A_2 : y + 1 = 0$.

- $B: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1; -1)$; $C: \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; -1)$

Từ đó $AB: \dfrac{x - \frac{4}{5}}{-1 - \frac{4}{5}} = \dfrac{y - \frac{7}{5}}{-1 - \frac{7}{5}} \Leftrightarrow 4x - 3y + 1 = 0$

$AC: \dfrac{x - \frac{4}{5}}{4 - \frac{4}{5}} = \dfrac{y - \frac{7}{5}}{-1 - \frac{7}{5}} \Leftrightarrow 3x + 4y - 8 = 0$.

Tóm lại, phương trình của các cạnh là :

$AB: 4x - 3y + 1 = 0$; $AC: 3x + 4y - 8 = 0$; $BC: y + 1 = 0$.

Bài 21

Hãy lập phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm I(–2; 3) và cách đều hai điểm A(5; –1) và B(3; 4).

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC TÂY NGUYÊN –KHỐI D – 2000)

Giải

Đường thẳng đi qua I có phương trình là :

$\Delta_1 : x = -2$ hoặc $\Delta_2 : y = k(x + 2) + 3 \Leftrightarrow kx - y + 2k + 3 = 0$

Dễ thấy $d(A, \Delta_1) = 7$, $d(B, \Delta_1) = 5$ nên Δ_1 không thỏa mãn bài toán.

Δ_2 thỏa mãn bài toán $\Leftrightarrow d[A, \Delta_2] = d[B; \Delta_2]$

$\Leftrightarrow \dfrac{|5k + 1 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \dfrac{|3k - 7 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

$\Leftrightarrow 7y + 4 = \pm(5k - 4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = -4 \end{array}\right.$

Vậy có hai đường thẳng qua I cách đều A và B là $y = 3$, $y = -4x - 5$.

❑ **Phương pháp giải khác** (không dùng hệ số góc)

Giả sử đường thẳng cần tìm có phương trình là : $Ax + By + C = 0$

Vì $I(-2; 3)$ thuộc đường thẳng nên : $-2A + 3B + C = 0$ (1)

Vì đường thẳng cách đều $A(5; -1)$ và $B(3; 4)$ nên :

$$\frac{|5A - B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3A + 4B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Leftrightarrow 5A - B + C = \pm(3A + 4B + C) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hai trường hợp :

*) $\begin{cases} -2A + 3B + C = 0 \\ 5A - B + C = 3A + 4B + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2A + 3B + C = 0 \\ A - 4B = 0 \end{cases}$

Chọn B = 1, ta được A = 4, C = –5. Vậy có đường thẳng thỏa mãn bài toán là : $4x + y - 5 = 0$.

**) $\begin{cases} -2A + 3B + C = 0 \\ 5A - B + C = -3A - 4B - C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2A + 3B + C = 0 \\ 4A - 3B - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ 3B + C = 0 \end{cases}$

Chọn B = 1, ta được C = –3.

Vậy có đường thẳng thỏa mãn bài toán là : $y - 3 = 0$.

Bài 22

Cho hai đường thẳng có phương trình : $2x + 3y + 1 = 0$ và $x - y + 3 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường thẳng nói trên và song song với đường thẳng : $3x - 5y = 0$.

Giải

Phương trình đường thẳng d có dạng : $\alpha(2x + 3y + 1) + \beta(x - y + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (2\alpha + \beta)x + (3\alpha - \beta)y + (\alpha + 3\beta) = 0$

Vì d song song với đường thẳng : $3x - 5y = 0$, nên :

$$\begin{cases} \frac{2\alpha + \beta}{3} = \frac{3\alpha - \beta}{-5} \\ \alpha + 3\beta \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19\alpha = -2\beta \\ \alpha + 3\beta \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -19 \end{cases}$$

Vậy d : $2(2x + 3y + 1) - 19(x - y + 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y + 11 = 0$.

Bài 23

Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy :

$(d_1) : mx + y - 4 = 0$; $(d_2) : 5x - 2y + 3 = 0$; $(d_3) : mx + 3y - 2 = 0$.

Giải

Phương trình (d_3) có dạng : $\alpha(mx + y - 4) + \beta(5x - 2y + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (m\alpha + 5\beta)x + (\alpha - 2\beta)y + (-4\alpha + 3\beta) = 0$

So sánh hai phương trình của (d_3), ta cần tìm α, β để : $\begin{cases} m\alpha + 5\beta = m \\ \alpha - 2\beta = 3 \\ -4\alpha + 3\beta = -2 \end{cases}$

Từ hai phương trình sau ta có $\alpha = -1$, $\beta = -2$. Thay vào phương trình đầu ta được : $-m - 10 = m \Leftrightarrow m = -5$

Vậy m = –5 thì ba đường thẳng đã cho đồng quy.

Bài 24

Trong mặt phẳng cho tam giác ABC với A(1; 1), đường cao hạ từ B và C lần lượt nằm trên đường thẳng $(d_1) : -2 + y - 8 = 0$ và $(d_2) : 2x + 3y - 6 = 0$.

Hãy viết phương trình đường thẳng chứa đường cao hạ từ A và xác định tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2 - 2000)

Giải

- Gọi (d_3) là đường cao hạ từ đỉnh A thì (d_3) có phương trình :

$$(d_3) : \lambda(-2x + y - 8) + \mu(2x + 3y - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (d_3) : (-2\lambda + 2\mu)x + (\lambda + 3\mu)y - (8\lambda + 6\mu) = 0$$

Vì (d_3) qua A(1; 1) nên : $-2\lambda + 2\mu + \lambda + 3\mu - 8\lambda - 6\mu = 0 \Leftrightarrow -9\lambda - \mu = 0$

Chọn $\lambda = -1 \Rightarrow \mu = 9$, ta có :

$$(d_3) : 20x + 26y - 46 = 0 \Leftrightarrow 10x + 13y - 23 = 0$$

- $AB \perp (d_2) \Rightarrow AB : 3x - 2y + c = 0$. Vì $A \in (AB)$ nên $3 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = -1$.

Suy ra AB : $3x - 2y - 1 = 0$

B là giao của AB và (d_1) :

$$B : \begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ -2x + y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-17; -26)$$

- $AC \perp (d_1)$ và đi qua A nên AC : $x + 2y - 3 = 0$

$$C : \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3; 0).$$

Chú ý : *Ta có thể viết phương trình (d_3) theo cách : (d_3) qua A và vuông góc với BC.*

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Cho tam giác ABC có các đỉnh A(1; 1), B(4; 5), C(13; –4). Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Viết phương trình các cạnh của tam giác.

b) Viết phương trình đường thẳng PN và đường trung tuyến AM. Gọi I là giao điểm của PN và AM. Kiểm tra lại rằng I là trung điểm của PN và $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IM}$.

ĐS : a) AB : $4x - 3y - 1 = 0$; BC : $x + y - 9 = 0$; CA : $5x + 12y - 17 = 0$.

b) $I\left(\frac{19}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

02. Cho ba điểm A(3; 5), B(–1; 3), C(4; 1). Viết phương trình đường thẳng đi qua A và tạo với BC một góc 45^0.

ĐS : $3x - 7y + 26 = 0$; $7x + 3y - 36 = 0$.

03. Lập phương trình đường thẳng qua điểm M(2; 7) và cách điểm N(1; 2) một khoảng bằng 1.

ĐS : $12x - 5y + 11 = 0$; $x - 2 = 0$.

04. Cho hai điểm A(1; 1), B(7; 4) và đường thẳng d : $2x - y - 4 = 0$. Chứng minh rằng d cắt đoạn AB tại một điểm M. Tính tỷ số $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

ĐS : $-\dfrac{1}{2}$.

05. Cho hai điểm A(0; 5), B(4; 1) và đường thẳng d : $x - 4y + 7 = 0$. Tìm điểm C trên d sao cho tam giác ABC là tam giác cân đáy AB.

ĐS : C(1; 2).

06. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 theo thứ tự có phương trình là :

$$3x + 4y - 1 = 0; \quad 4x + 3y + 5 = 0.$$

a) Viết phương trình các đường phân giác các góc hợp bởi đường thẳng d_1 và d_2.

b) Viết đường phân giác của góc nhọn hợp bởi d_1 và d_2.

ĐS : a) $x - y + 6 = 0$; $7x + 7y + 4 = 0$. b) $7x + 7y + 4 = 0$.

07. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y - 1 = 0$ và điểm I(1; 2).

a) Tính khoảng cách từ I đến d.

b) Tìm tọa độ điểm I' đối xứng với I qua d.

ĐS : a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; b) $I'\left(\dfrac{6}{5}; \dfrac{19}{10}\right)$.

08. Viết phương trình các đường trung trực của tam giác ABC biết trung điểm của các cạnh là M(–1; –1), N(1; 9), P(9; 1).

ĐS : $x - y = 0$; $5x + y - 14 = 0$; $x + 5y - 14 = 0$.

09. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình :

$$d_1 : kx - y + k = 0; \quad d_2 : (1 - k^2)x + 2ky - (1 + k^2) = 0.$$

a) Chứng minh rằng khi k thay đổi, d_1 luôn đi qua một điểm cố định.

b) Với mỗi giá trị k, hãy xác định giao điểm của d_1 và d_2.

c) Tìm quỹ tích giao điểm của d_1, d_2 khi k thay đổi.

ĐS : a) Điểm cố định A(–1; 0). b) $x = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$; $y = \dfrac{2k}{1+k^2}$

c) $x^2 + y^2 = 1$.

10. Cho diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{3}{2}$, hai đỉnh A(2; –3); B(3; –2) và trọng tâm G của tam giác thuộc đường thẳng $3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

ĐS : C(–2; –10) hoặc C(1; 1).

11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 5 điểm A(0; –1); B(2; 3), $C\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, E(1; 6), F(–3; –4).

a) Kiểm nghiệm rằng A, B, C thuộc đường thẳng $\Delta : 2x - y - 1 = 0$.

Tìm trên Δ điểm D sao cho 4 điểm A, B, C, D lập thành một hàng điểm điều hoà.

b) Tìm M trên Δ sao cho $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FM}$ có độ dài nhỏ nhất.

ĐS : a) D (–1; –3). b) $M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

12. Trong mặt phẳng tọa độ cho 4 điểm A(a; 0), B(0; 6), M(m; 0), N(0; n) trong đó a, b không đổi còn m, n thay đổi sao cho luôn có : $\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = 2$.

Tìm tập hợp giao điểm của các đường thẳng AN và BM.

ĐS : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$.

13. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d : $x\cos\alpha + y\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng khi α thay đổi, đường thẳng d luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

b) Cho điểm I(–2; 1). Dựng IH ⊥ d (H ∈ d) và kéo dài IH một đoạn HN = 2IH. Tính tọa độ của N theo α.

ĐS : a) Đường tròn cố định : $(x + 2)^2 + y^2 = 1$.

b) $N(-2 - 3\cos\alpha(\sin\alpha + 1); 1 - 3\sin\alpha(\sin\alpha + 1))$.

14. Cho P(3; 0) và hai đường thẳng $d_1 : 2x - y - 2 = 0$ và $d_2 : x + y + 3 = 0$. Gọi d là đường thẳng đi qua P cắt d_1, d_2 lần lượt ở A và B. Viết phương trình của d biết rằng PA = PB.

ĐS : $8x - y - 24 = 0$.

15. Cho A(1; 2). B(2; 5). Điểm M di động trên đường thẳng d : $x - 2y - 2 = 0$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của MA + MB và của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của |MA – MB|.

ĐS : a) $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$; b) 0; $\sqrt{10}$.

16. Cho tam giác ABC biết A(2; –1) và hai đường phân giác của góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ lần lượt là $d_B : x - 2y + 1 = 0$; $d_C : x + y + 3 = 0$. Tìm phương trình cạnh BC.

(ĐỀ THI ĐH LUẬT VÀ ĐH XÂY DỰNG HÀ NỘI – 2000)

ĐS : $4x - y + 3 = 0$ (xem bài 20 phần c).

Chuyên đề 3 : ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

i) Phương trình tổng quát

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \quad a^2 + b^2 - c > 0,$$

là đường tròn có tâm I(–a; –b), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

- Phương trình bậc hai $ax^2 + bxy + cy^2 + 2dx + 2cy + f = 0$

là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \neq 0 \\ b = 0 \\ d^2 + e^2 - \dfrac{f}{a} > 0 \end{cases}$.

ii) Phương trình chính tắc

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

là phương trình đường tròn tâm I(a; b), bán kính R > 0.

2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường tròn (C) : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ là :

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2.$$

Điều kiện để đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với (C) là :

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|aA + bB + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R.$$

- Nếu đường tròn cho bởi phương trình tổng quát :

$$(C') : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

thì tiếp tuyến với (C') tại $M(x_0; y_0) \in (C')$ là :

$$xx_0 + yy_0 + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c = 0.$$

3. Phương tích. Trục đẳng phương

Cho đường tròn (C) : $f(x; y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

Phương tích điểm $M(x_0; y_0)$ đối với (C) là $\mathscr{P}_{M/(C)} = f(x_0; y_0)$.

Cho hai đường tròn :

$$(C) : f(x, y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

$$(C') : g(x, y) = x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0$$

Tập các điểm có cùng phương tích của (C) và (C'), còn gọi là trục đẳng phương của (C) và (C') là đường thẳng :

$$f(x; y) = g(x; y) \Leftrightarrow 2(a - a')x + 2(b - b')y + c - c' = 0.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : TÌM PHƯƠNG TRÌNH CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

A. PHƯƠNG PHÁP

Nếu sử dụng dạng tổng quát thì cần tìm a, b, c. Nếu sử dụng dạng chính tắc thì cần tìm a, b, R.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm A(–2; 0); B(0; 4). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm O, A, B.

Giải

- Sử dụng dạng tổng quát của phương trình đường tròn, ta có :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Vì đường tròn đi qua O(0; 0), A(–2; 0), B(0; 4) nên

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4 - 4a + c = 0 \\ 16 + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

- Sử dụng dạng chính tắc của phương trình đường tròn, ta có :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Vì tam giác OAB vuông tại O nên tâm I của (C) là trung điểm của đoạn AB : I(-1; 2).

$$R = OI = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Vậy (C) : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Vấn đề 2 : KHẢO SÁT TÍNH CHẤT CỦA MỘT HỌ ĐƯỜNG TRÒN

A. PHƯƠNG PHÁP

Cần chú ý điều kiện của tham số để phương trình xác định một đường tròn. Đưa phương trình về dạng tổng quát hoặc dạng chính tắc để sử dụng công thức tìm tâm và tìm bán kính của đường tròn đã cho.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho họ đường tròn :

$$(C_m) : x^2 + y^2 -(m - 2)x + 2my - 1 = 0.$$

a) Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m).

b) Chứng tỏ rằng khi m thay đổi, các đường tròn (C_m) đều đi qua một điểm cố định.

Giải

a) $(C_m): x^2 + y^2 - (m-2)x + 2my - 1 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

với $a = -\dfrac{m-2}{2}$, $b = m$, $c = -1$

Vì $a^2 + b^2 - c = \left(\dfrac{m-2}{2}\right)^2 + m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên với mọi m, (C_m) là

đường tròn có tâm $I\left(\dfrac{m-2}{2}; -m\right)$ và bán kính $R = \sqrt{\left(\dfrac{m-2}{2}\right)^2 + m^2 + 1}$.

Gọi (L) là tập hợp các tâm của đường tròn (C_m)

$$(x; y) \in (L) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m-2}{2} \\ y = -m \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y + 2 = 0.$$

Vậy (L) là đường thẳng : $2x + y + 2 = 0$.

b) $(C_m): x^2 + y^2 - (m-2)x + 2my - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2y - x)m + (x^2 + y^2 + 2x - 1) = 0$

Tọa độ điểm (C_m) luôn đi qua là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2y - x = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 + 4y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Vậy họ (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định là $(-2; -1)$ và $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$.

Vấn đề 3 : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. PHƯƠNG PHÁP

Cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) tâm I, bán kính R. Khi đó nếu $d(I; \Delta) < R$ thì Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt, $d(I; \Delta) = R$ thì Δ tiếp xúc với (C), $d(I; \Delta) > R$ thì Δ không cắt (C).

Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính R và đường tròn (C') tâm I', bán kính R'. Khi đó :

Nếu $II' > R + R'$ hoặc $II' < |R - R'|$ thì hai đường tròn không cắt nhau.

Nếu $II' = R + R'$ thì hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau,

$II' = |R - R'|$ thì hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.

Nếu $|R - R'| < II' < R + R'$ thì hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 3

Cho đường tròn (C) có phương trình : $5x^2 + 5y^2 - 10x + 4 = 0$ và đường thẳng Δ có phương trình : $mx - y - 2m + 3 = 0$.

Hãy biện luận theo m số giao điểm của (C) và Δ.

Giải

Ta có (C) : $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{5}$

Vì vậy (C) có tâm (1; 0) và bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Khoảng cách từ I đến Δ là : $d(I, \Delta) = \frac{|m - 2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|3 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{(3 - m)^2}{m^2 + 1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2m^2 - 15m + 22 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \frac{11}{2} \end{array}\right.$$

$$d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{(m - 2)^2}{m^2 + 1} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2m^2 - 15m + 22 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < \frac{11}{2}.$$

Vậy $2 < m < \frac{11}{2}$: (C) cắt Δ tại hai điểm phân biệt.

$m = 2, m = \frac{11}{2}$: (C) và Δ tiếp xúc với nhau.

$m < 2, m > \frac{11}{2}$: (C) và Δ không cắt nhau.

Vấn đề 4 : TÌM TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

A. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng công thức tìm tiếp tuyến. Trong trường hợp sử dụng phương pháp chung để tìm tiếp tuyến cần chú ý đường tròn có thể có tiếp tuyến dạng x = c.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 4

Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

a) Tìm tâm và bán kính của đường tròn.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn và đi qua điểm P(4; 7).

Giải

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

Vậy đường tròn có tâm I(−1; 2), bán kính $R = \sqrt{5}$.

b) Thay $x_0 = 1$ vào phương trình đường tròn, ta được :

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1;\ y = 3$$

Vậy đường ròn có hai điểm có hoành độ $x = 1$ là M_1 (1; 1) và M_2(1; 3).

Theo công thức tìm tiếp tuyến, ta có :

- Tiếp tuyến tại M_1 : $(1 + 1)(x + 1) + (1 - 2)(y - 2) = 5 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$.
- Tiếp tuyến tại M_2 : $(1 + 1)(x + 1) + (3 - 2)(y - 2) = 5 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$.

c) $PI = \sqrt{(4+1)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} > \sqrt{5} = R$, do đó P nằm ngoài đường tròn. Từ P có thể vẽ được hai tiếp tuyến với đường tròn.

Đường thẳng qua P có hệ số góc k

$$y = k(x - 4) + 7 \Leftrightarrow kx - y + 7 - 4k = 0$$

Đường thẳng này tiếp xúc với đường tròn $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{|-k - 2 + 7 - 4k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy có hai tiếp tuyến với đường tròn qua P là :

$$y = 2(x - 4) + 7 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 4) + 7 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 5.$$

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A(2; 0), B(0; 1), C(–1; 2).

Giải

- **Cách 1 :** Phương trình tổng quát của đường tròn là

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Đường tròn đi qua A (2, 0) : $4 + 4a + c = 0$.

Đường tròn đi qua B (0; 1) : $1 + 2b + c = 0$.

Đường tròn đi qua C(–1, 2) : $1 + 4 - 2a + 4b + c = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + c + 4 = 0 \\ 2b + c + 1 = 0 \\ -2a + 4b + c + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{7}{2} \\ b = -\frac{11}{2} \\ c = 10 \end{cases}.$$

Vậy đường tròn cần tìm có phương trình tổng quát là :

$$x^2 + y^2 - 7x - 11y + 10 = 0.$$

• **Cách 2 :** Ta tìm tâm I và bán kính R của đường tròn.

Trung trực của đoạn AB có phương trình là $4x - 2y - 3 = 0$.

Trung trực của đoạn AC có phương trình là $x - y + 2 = 0$.

I là giao điểm của hai đường trung trực nên

$$I : \begin{cases} 4x - 2y - 3 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right).$$

R là khoảng cách từ I đến một trong các điểm A, B, C.

$$R = IA = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{2}.$$

Vậy đường tròn có phương trình chính tắc là $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$.

• **Cách 3 :** Gọi (x, y) là tọa độ của tâm I.

$IA^2 = (x - 2)^2 + y^2$, $IB^2 = x^2 + (y - 1)^2$, $IC^2 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2$

Vì IA = IB = IC nên $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 3 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right).$$

Công việc tiếp theo tiến hành như cách 2.

Bài 2

> Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng
> $d_1 : 4x + 3y - 8 = 0$, $d_2 : 3x + 4y - 1 = 0$
> và có tâm nằm trên đường thẳng $d_3 : 2x + y - 1 = 0$.

Giải

Gọi $I(x_0; y_0)$ là tâm của đường tròn. Khi đó :

$$d(I, d_1) = d(I, d_2) \Leftrightarrow \frac{|4x_0 + 3y_0 - 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|3x_0 + 4y_0 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\Leftrightarrow |4x_0 + 3y_0 - 8| = |3x_0 + 4y_0 - 1|$$

$$\Leftrightarrow 4x_0 + 3y_0 - 8 = \pm(3x_0 + 4y_0 - 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - y_0 = 7 \\ 7x_0 + 7y_0 = 9 \end{array}\right.$$

Vì $I(x_0; y_0) \in d_3 \Rightarrow 2x_0 + y_0 - 1 = 0$

• $\begin{cases} x_0 - y_0 = 7 \\ 2x_0 + y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{8}{3} \\ y_0 = -\frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow I_1\left(\frac{8}{3}; -\frac{13}{3}\right)$

$$R_1 = d(I_1, d_1) = \frac{\left|4.\frac{8}{3} - 3.\frac{13}{3} - 8\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{31}{15}.$$

Ta được phương trình đường tròn thỏa mãn bài toán là :

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{3}\right)^2 = \left(\frac{31}{15}\right)^2.$$

- $\begin{cases} 7x_0 + 7y_0 = 9 \\ 2x_0 + y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{2}{7} \\ y_0 = \dfrac{11}{7} \end{cases} \Rightarrow I_2\left(-\dfrac{2}{7}; \dfrac{11}{7}\right)$

$$R_2 = d(I_2, d_1) = \frac{\left|-4.\frac{2}{7} + 3.\frac{11}{7} - 8\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{31}{35}.$$

Ta được đường tròn thứ hai thỏa mãn bài toán là :

$$\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{7}\right)^2 = \left(\frac{31}{35}\right)^2.$$

Bài 3

Cho tam giác ABC biết ba cạnh lần lượt nằm trên ba đường thẳng

AB : $x - 4 = 0$; BC : $3x - 4y + 36 = 0$; CA : $4x + 3y + 23 = 0$.

a) Tìm tọa độ các đỉnh.

b) Có nhận xét gì về hình dạng tam giác ABC.

c) Viết phương trình đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

a) Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 4 = 0 \\ 4x + 3y + 23 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4; -13)$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 4 = 0 \\ 3x - 4y + 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(4; 12)$.

Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - 4y + 36 = 0 \\ 4x + 3y + 23 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-8; 3)$.

b) Ta có : $\overrightarrow{CA} = (12; -16)$; $\overrightarrow{CB} = (12; 9)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (12)^2 - 16.9 = 0 \Rightarrow CA \perp CB \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.

c) • $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \dfrac{(0; 25)}{25} = (0; 1)$; $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \dfrac{(-12; 16)}{\sqrt{12^2 + 16^2}} = \left(-\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$

$\Rightarrow$ Vectơ chỉ phương phân giác $\widehat{BAC}$ là :

$$(0;\ 1) + \left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right) // (-1;\ 3).$$

Vậy phân giác $\widehat{BAC}$ là : $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+13}{3} \Leftrightarrow 3x + y + 1 = 0$

• $\dfrac{\overrightarrow{BA}}{BA} = \dfrac{(0;-25)}{25} = (0;\ -1)$, $\quad \dfrac{\overrightarrow{BC}}{BC} = \dfrac{(-12;\ -9)}{\sqrt{12^2+9^2}} = \left(-\dfrac{4}{5};\ -\dfrac{3}{5}\right)$

⇒ Vectơ chỉ phương phân giác $\widehat{BAC}$ là :

$$(0;\ -1) + \left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5};-\frac{8}{5}\right) // (1;\ 2)$$

Vậy phân giác $\widehat{BAC}$ là : $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-12}{2} \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0.$

Tâm I của đường tròn nội tiếp có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-1;\ 2)$$

Bán kính đường tròn nội tiếp là : $r = d(I,\ AB) = \dfrac{|-1-4|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 5$

⇒ Phương trình đường tròn nội tiếp là $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

Vì tam giác ABC vuông tại C nên tâm K của đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của AB ⇒ $K\left(4;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp là : $R = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{25}{2}$

⇒ Phương trình đường tròn ngoại tiếp là : $(x-4)^2 + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{625}{4}$.

Bài 4

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : 2x + y + 2 = 0$; $\Delta_2 : 2x + y - 18 = 0$.

a) Tìm quỹ tích tâm của đường tròn tiếp xúc với cả hai đường thẳng.

b) Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng và đi qua điểm A(1; 0).

Giải

a) Gọi I(x; y) là tâm của đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.

Khi đó : $R = d(I,\ \Delta_1) = \dfrac{|2x+y+2|}{\sqrt{5}}$

$R = d(I,\ \Delta_2) = \dfrac{|2x+y-18|}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \frac{|2x + y + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{|12x + y - 18|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2x + y - 8 = 0.$$

Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn là đường thẳng $2x + y - 8 = 0$.

b) Vì $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{-18}$ nên $\Delta_1 // \Delta_2$, điểm $(0; -2) \in \Delta_1$ nên

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|2.0 - 2 - 18|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Đường tròn tiếp xúc với Δ_1 và Δ_2 có bán kính là $R = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$.

Gọi $I(x_0; y_0)$ là tâm của đường tròn qua A, tiếp xúc với Δ_1, Δ_2. Khi đó :

I thuộc đường thẳng quỹ tích $\Rightarrow 2x_0 + y_0 - 8 = 0$

$IA = R \Rightarrow (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 20$.

Vậy I : $\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 8 = 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 8 - 2x_0 \\ 5x_0^2 - 34x_0 + 45 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{9}{5} \\ y_0 = \frac{22}{5} \end{cases}; \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -2 \end{cases}.$$

Từ đó, có hai đường tròn đi qua A, tiếp xúc với Δ_1, Δ_2 là

$$\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{22}{5}\right)^2 = 20; \quad (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20.$$

Bài 5

Trong mặt phẳng tọa độ cho họ đường tròn có phương trình :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 4mx - 2y + 4m = 0, m \in \mathbb{R}.$$

a) Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn theo m.

b) Tìm quỹ tích của điểm I khi m thay đổi.

c) Tìm quỹ tích điểm cố định mà họ đường tròn này luôn đi qua.

d) Chứng minh rằng họ đường tròn này tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định khi m thay đổi. Viết phương trình đường tiếp tuyến chung tại điểm đó.

Giải

a) $x^2 + y^2 - 4mx - 2y + 4m = 0 \Leftrightarrow (x - 2m)^2 + (y - 1)^2 = (2m - 1)^2$.

Vậy (C_m) có tâm $I(2m; 1)$, bán kính $|2m - 1|$.

b) Tọa độ của I : $\begin{cases} x = 2m \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1$. Vậy quỹ tích của I là đường thẳng $y = 1$.

c) Ta viết $(C_m) : 4m(1 - x) + x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Điểm cố định của họ (C_m) là nghiệm của hệ $\begin{cases} 1 - x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy (C_m) luôn đi qua điểm cố định A(1; 1).

d) Các đường tròn (C_m) có tâm nằm trên đường thẳng y = 1, luôn đi qua điểm A(1; 1) thuộc đường thẳng y = 1 nên chúng tiếp xúc với nhau tại A cố định. Tiếp tuyến chung tại A là đường thẳng đi qua A, vuông góc với đường thẳng y = 1. Vậy tiếp tuyến chung là x = 1.

Bài 6

Cho các đường tròn : $(C) : x^2 + y^2 - 1 = 0.$

$(C_m) : x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0.$

a) Tìm quỹ tích tâm của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

b) Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_m) tiếp xúc với đường tròn (C) ứng với hai giá trị của m. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_m) đó.

(ĐỀ THI ĐH Y DƯỢC TP - HCM - 1999)

Giải

a) $(C_m) : [x - (m + 1)]^2 + (y + 2m)^2 = (m + 1)^2 + 4m^2 + 5.$

Vì $(m + 1)^2 + 4m^2 + 5 > 0$ nên với mọi m, (C_m) đều xác định một đường tròn. Tọa độ tâm của (C_m) là $\begin{cases} x = m + 1 \\ y = -2m \end{cases} \Rightarrow y = -2(x - 1) \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0.$

Vậy quỹ tích của tâm của (C_m) là đường thẳng 2x + y − 2 = 0.

b) Theo a) (C_m) có tâm I(m + 1; −2m),

$$\text{bán kính } R = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5} = \sqrt{5m^2 + 2m + 6}$$

Khoảng cách giữa tâm của (C) và (C_m) là :

$$OI = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} = \sqrt{5m^2 + 2m + 1}.$$

- (C_m) tiếp xúc ngoài với (C) $\Leftrightarrow R_m + R = OI$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m + 6} + 1 = \sqrt{5m^2 + 2m + 1}$$

$\Rightarrow$ không có m nào thỏa mãn (vì vế trái > vế phải).

- (C_m) tiếp xúc trong với (C) $\Leftrightarrow \left|\sqrt{5m^2 + 2m + 6} - 1\right| = \sqrt{5m^2 + 2m + 1}$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 2m + 6 - 2\sqrt{5m^2 + 2m + 6} + 1 = 5m^2 + 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m + 6} = 3 \Leftrightarrow 5m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn của họ (C_m) tiếp xúc với (C) là :

$m = -1 \Rightarrow (\mathscr{C}_1) : x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$, tâm $I_1(0; 2)$, bán kính $R_1 = 3$.

$m = \frac{3}{5} \Rightarrow (\mathscr{C}_2) : x^2 + y^2 - \frac{16}{5}x + \frac{12}{5}y - 5 = 0$, tâm $I_2\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$, bán kính $R_2 = 3$.

Vì $I_1I_2 = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5} - 2\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5} < R_1 + R_2 = 6$

và $I_1I_2 > 0 = R_1 - R_2$ nên $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ cắt nhau $\Rightarrow (\mathscr{C}_1), (\mathscr{C}_2)$ có hai tiếp tuyến chung.

Vì $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ có cùng bán kính nên các tiếp tuyến chung song song I_1I_2 và cách I_1I_2 một khoảng cách bằng bán kính.

$\overrightarrow{I_1I_2} = \left(\frac{8}{5}; -\frac{16}{5}\right) // (1; -2)$ là vectơ chỉ phương của tiếp tuyến, do đó phương trình tiếp tuyến có dạng $(\Delta) : 2x + y + c = 0$.

$$d(I_1, \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2 + c|}{\sqrt{4 + 1}} = 3 \Leftrightarrow c = -2 \pm 3\sqrt{5}.$$

Vậy có hai tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ là $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$.

Bài 7

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho họ đường cong phụ thuộc tham số m có phương trình $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2m(x - a) = 0$, trong đó a là một số dương cho trước, cố định.

a) Với giá trị nào của m, phương trình trên là phương trình của đường tròn ? Ký hiệu (C_m) là đường tròn ứng với giá trị của m.

b) Chứng tỏ rằng đoạn thẳng nối điểm O (gốc tọa độ) với điểm A(2a; 0) luôn cắt đường tròn (C_m).

c) Chứng tỏ rằng tồn tại một đường thẳng là trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn (C_m).

Giải

a) $x^2 + y^2 - 2m(x - a) = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 + y^2 = m^2 - 2ma$.

m xác định một đường tròn khác đường tròn điểm

$$\Leftrightarrow m^2 - 2ma > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2a \end{array}\right..$$

b) $P_{O/(C_m)} = F(0; 0) = 2ma$; $P_{A/(C_m)} = F(2a; 0) = 4a^2 - 2ma$

$\Rightarrow P_{O/(C_m)} . P_{A/(C_m)} = 2ma(4a^2 - 2ma) = -4a^2(m^2 - 2ma) < 0$

(do điều kiện ở a)).

$\Rightarrow$ Trong hai điểm O, A, một điểm nằm trong, một điểm nằm ngoài (C_m)
$\Rightarrow$ đoạn thẳng OA cắt (C_m).

c) Gọi m_1, m_2 ($m_1 \neq m_2$) là hai giá trị của m ứng với hai đường tròn (C_{m_1}), (C_{m_2}) có phương trình : $F_{m_1}(x; y) = x^2 + y^2 - 2m_1(x - a) = 0$,

$$F_{m_2}(x; y) = x^2 + y^2 - 2m_2(x - a) = 0.$$

$\Rightarrow$ Trục đẳng phương của (C_{m_1}),(C_{m_2}) là :

$$x^2 + y^2 - 2_{m_1}(x - a) = x^2 + y^2 - 2_{m_2}(x - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m_1 - m_2)(x - a) = 0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Vậy đường thẳng x = a không phụ thuộc m là trục đẳng phương của mọi đường tròn (C_m).

Bài 8

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy xét họ đường tròn có phương trình :

$$x^2 + y^2 - (2m + 1)x - 2(m + 2)y + 6m + 7 = 0.$$

a) Tìm quỹ tích tâm của họ đường tròn.

b) Xác định tọa độ tâm của đường tròn thuộc họ đã cho mà nó tiếp xúc với trục Oy.

(ĐỀ THI ĐHQG HÀ NỘI - KHỐI A - 1999)

Giải

a) Ta viết phương trình đường tròn dưới dạng

$$[x - (m + 1)]^2 + [y - (m + 2)]^2 = 2(m^2 - 1).$$

Để xác định một đường tròn, điều kiện là $2(m^2 - 1) \geq 0 \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$

Tọa độ của tâm I; $I : \begin{cases} x = m + 1 \\ y = m + 2 \end{cases}$; $m \leq -1$, $m \geq 1$

$$\Rightarrow I : y = x + 1,\ x \leq 0 \text{ hoặc } x \geq 2.$$

Vậy quỹ tích của I là đường thẳng y = x + 1 bỏ đi khoảng từ điểm (0; 1) đến (2; 3).

b) Trục tung có phương trình x = 0. Vậy ta cần tìm m để phương trình sau đây có nghiệm kép : $y^2 - 2(m + 2)y + 6m + 7 = 0$,

Tức là $\Delta' = (m + 2)^2 - (6m + 7) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right.$

Khi m = –1 thì đường tròn trở thành một điểm nên bị loại.

Vậy chỉ có m = 3 thỏa mãn bài toán.

Bài 9

Cho ba điểm A(3; 1), B(0; 7), C(5; 2) trong mặt phẳng tọa độ.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông. Tính diện tích tam giác ABC.

b) Giả sử M chạy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, chứng minh rằng khi đó trọng tâm G của tam giác MBC chạy trên một đường tròn. Viết phương trình chính tắc của đường tròn đó.

(ĐỀ THI ĐH NÔNG NGHIỆP 1 HÀ NỘI - 1998)

Giải

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 6)$; $\overrightarrow{AC} = (2; 1)$. Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6 + 6 = 0$

Nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Vậy tam giác ABC vuông tại A. Từ đó :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{9+36}\sqrt{4+1} = \frac{15}{2}.$$

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I là trung điểm của BC $\Rightarrow I\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{1}{2}BC \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{5^2+5^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác MBC, ta có :

$$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MI} \Rightarrow GI = |\overrightarrow{GI}| = \frac{1}{3}R = \frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

Vậy G chạy trên đường tròn tâm I, bán kính $\frac{5\sqrt{2}}{6}$, có phương trình chính tắc là $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{18}$.

Bài 10

Cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số α

$$(x - 1)\cos\alpha + (y - 1)\sin\alpha - 4 = 0.$$

a) Tìm tập hợp các điểm của mặt phẳng không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ.

b) Chứng minh rằng mọi đường thẳng của họ đều tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải

a) Điểm (x; y) không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ.

$\Leftrightarrow (x - 1)\cos\alpha + (y - 1)\sin\alpha - 4 = 0$ vô nghiệm với $\forall\alpha$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 4^2$.

Vậy tập hợp các điểm không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ là các điểm phía trong đường tròn tâm (1; 1), bán kính 4.

b) Khoảng cách từ một điểm $I(x_I; y_I)$ đến đường thẳng của họ là :

$$d = \frac{|(x_I - 1)\cos\alpha + (y_I - 1)\sin\alpha - 4|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}$$

$$= |(x_I - 1)\cos\alpha + (y_I - 1)\sin\alpha - 4|$$

Khoảng cách này không phụ thuộc α ⇔ $\begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 1 \end{cases}$ ⇒ d = 4

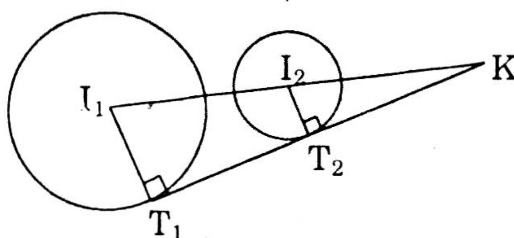
Vậy với mọi α, đường thẳng luôn tiếp xúc với đường tròn cố định :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4^2.$$

Bài 11

> Viết phương trình tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn
> $$(C_1) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$$
> $$(C_2) : x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0.$$

Giải



$(C_1) : (x - 3)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ có tâm $I_1(3; 0)$, bán kính $R_1 = 2$.

$(C_2) : (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 1 \Rightarrow$ có tâm $I_2(6; 3)$, bán kính $R_2 = 1$.

$I_1I_2 = \sqrt{(6-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} > R_1 + R_2$ nên (C_1) và (C_2) không cắt nhau

$\Rightarrow (C_1), (C_2)$ có hai tiếp tuyến chung ngoài.

Giả sử tiếp tuyến chung ngoài có tiếp điểm với (C_1) tại T_1, với (C_2) tại T_2 và I_1I_2 cắt T_1T_2 tại K.

Vì $I_1T_1 // I_2T_2$ và $I_1T_1 = 2I_2T_2$ nên I_2 là trung điểm của I_1K.

Từ đó $x_K = 2x_{I_2} - x_{I_1} = 9$; $y_K = 2y_{I_2} - y_{I_1} = 6$

Vậy K(9; 6). Đường thẳng qua K có hệ số góc k có phương trình dạng :

$$y = k(x - 9) + 6 \Leftrightarrow kx - y + 6 - 9k = 0.$$

Đường thẳng này tiếp xúc với (C_2) (và do đó cũng tiếp xúc với (C_1))

$$\Leftrightarrow \frac{|6k - 3 + 6 - 9k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 3|k - 1| = \sqrt{k^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 9(k^2 - 2k + 1) = k^2 + 1 \Leftrightarrow 8k^2 - 18k + 8 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}.$$

Vậy có hai tiếp tuyến chung ngoài là :

$$y = \frac{9+\sqrt{17}}{8}(x - 9) + 6 \Leftrightarrow (9 + \sqrt{17})x - 8y - 33 - 9\sqrt{17} = 0.$$

$$y = \frac{9-\sqrt{17}}{8}(x - 9) + 6 \Leftrightarrow (9 - \sqrt{17})x - 8y - 33 + 9\sqrt{17} = 0.$$

Bài 12

Cho họ đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \frac{9m^2}{2} - m - \frac{1}{2} = 0$. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi, (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Giải

Ta tìm tiếp tuyến chung dạng $\Delta: y = kx + b \Leftrightarrow kx - y + b = 0$.

Vì $(C_m): (x - 2m)^2 + (y - m)^2 = \frac{1}{2}(m + 1)^2$ nên (C_m) có tâm I(2m; m), bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}|m + 1|$.

Δ tiếp xúc với $(C_m) \Leftrightarrow \frac{|2km - m + b|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}|m + 1|$ (*)

Tiếp tuyến cố định là tiếp tuyến Δ sao cho (*) đúng với $\forall m$. Ta có :

$(*) \Leftrightarrow (2km - m + b)^2 = \frac{1}{2}(k^2 + 1)(m + 1)^2$

$\Leftrightarrow (7k^2 - 8k + 1)m^2 + (8kb - 4b - 2k^2 - 2)m + 2b^2 - k^2 - 1 = 0$

Đẳng thức này xảy ra với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} 7k^2 - 8k + 1 = 0 & (1) \\ 8kb - 4b - 2k^2 - 2 = 0 & (2) \\ 2b^2 - k^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow k = 1, k = \frac{1}{7}$.

- $k = 1$, thay vào (3) ta được $b = \pm 1$, thử vào (2) ta thấy chỉ có $b = 1$ nghiệm đúng. Vậy ta được tiếp tuyến cố định là : $y = x + 1$.
- $k = \frac{1}{7}$, thay vào (3) ta được $b = \pm\frac{5}{7}$, thử vào (2) ta thấy chỉ có $b = -\frac{5}{7}$ nghiệm đúng. Vậy ta được tiếp tuyến cố định thứ hai là : $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$.

Bài 13

Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm A(1; 3).

a) Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C), chứng tỏ A nằm ngoài đường tròn.

b) Lập phương trình tiếp tuyến của (C) xuất phát từ điểm A.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC HÀNG HẢI - 2000)

Giải

a) Ta có $(C): (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$

Do đó (C) có tâm I(3; −1), bán kính R = 2.

$IA = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} > 2 = R$, nên A nằm ngoài đường tròn.

b) Họ đường thẳng đi qua A có phương trình dạng :

$\Delta_1 : x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ hoặc $\Delta_2 : y = k(x - 1) + 3 \Leftrightarrow kx - y - k + 3 = 0$

$d(I; \Delta_1) = \dfrac{|3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2 = R$, nên x = 1 là một tiếp tuyến của (C) đi qua A.

$$d(I; \Delta_2) = \frac{|3k + 1 - k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |k + 2| = \sqrt{k^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 4k + 4 = k^2 + 1 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

Δ_2 tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow k = -\dfrac{3}{4}$. Vậy ta có tiếp tuyến thứ hai của (C) đi qua A là : $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{15}{4}$.

Bài 14

Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình là :

$(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0;$ $(C_2) : x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0.$

a) Chứng minh rằng (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C_1) và (C_2).

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC TÂY NGUYÊN - KHỐI A - 2000)

Giải

a) $(C_1) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow$ Tâm $I_1(1; 1)$, bán kính $R_1 = 2$.

$(C_2) : (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow$ Tâm $I_2(4; 1)$, bán kính $R_2 = 1$.

Ta thấy $R_1 + R_2 = 3 = I_1I_2$, do đó (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau.

b) Dễ thấy I_1I_2 là đường thẳng y = 1 song song với trục Ox. Tiếp điểm của (C_1) và (C_2) nằm trên I_1I_2, có hoành độ là : x = 1 + 2 = 3. Tiếp tuyến chung tại điểm này vuông góc với I_1I_2 nên có phương trình là x = 3.

Giả sử Δ là một tiếp tuyến chung ngoài của (C_1) và (C_2). Gọi A là giao điểm của Δ và I_1I_2. Khi đó dễ thấy :

$$\frac{AI_1}{AI_2} = \frac{R_1}{R_2} = 2 \Rightarrow AI_1 = 2AI_2 \Rightarrow AI_1 = 2I_1I_2 = 6 \Rightarrow A(7; 1)$$

Vì tiếp tuyến qua A không song song với trục tung nên có phương trình dạng : $\Delta : y = k(x - 7) + 1 \Leftrightarrow kx - y - 7k + 1 = 0$

Đường thẳng này là tiếp tuyến chung : $d(I_1; \Delta) = R_1$

$$\Leftrightarrow \frac{|k - 1 - 7k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |3k| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow k = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Từ đó (C_1) và (C_2) có ba tiếp tuyến chung ngoài là : $y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - 7) + 1$

Vậy (C_1) và (C_2) có ba tiếp tuyến chung.

Bài 15

Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$

a) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$ là các nghiệm của hệ đã cho, chứng minh rằng

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1.$$

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC THƯƠNG MẠI – 2000)

Giải

a) $\Delta : x + ay - a = 0$ là phương trình của đường thẳng;

$x^2 + y^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ là đường tròn tâm $I(\frac{1}{2}; 0)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow d(I; \Delta) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2} - a\right|}{\sqrt{1 + a^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 < \frac{1}{4}(1 + a^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3}$$

b) Giả sử $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thì AB là một dây cung của đường tròn bán kính $\frac{1}{2}$, do đó : $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \le 1$

hay $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \le 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ AB đi qua tâm của đường tròn $\Leftrightarrow \frac{1}{2} - a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y + 2 = 0$ tại điểm B(–2; –1).

ĐS : $(x + 11)^2 + (y - 11)^2 = 225$.

02. Tìm độ dài dây cung xác định bởi đường thẳng $\Delta : 4x + 3y - 8 = 0$ và đường tròn tâm I(2; 1), có một tiếp tuyến Δ' có phương trình $5x - 12y + 15 = 0$.

ĐS : $\frac{8}{5}$.

03. Viết phương trình đường tròn đi qua gốc tọa độ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1 : 4x + y - 4 = 0$; $d_2 : 4x - y + 12 = 0$.

ĐS : $x^2 + y^2 + 2x + \frac{2 - \sqrt{51}}{2}y = 0$; $x^2 + y^2 + 2x + \frac{2 + \sqrt{51}}{2}y = 0$.

04. Cho họ đường cong (C_m) có phương trình :

$$m(x^2 + y^2) - 2(2m + 1)x + 2y + 2m + 1 = 0, m \in R.$$

a) Chứng minh rằng họ (C_m) có một đường thẳng duy nhất và với mọi m khác đều là đường tròn.

b) Trường hợp (C_m) là đường tròn, tìm tập hợp tâm của nó.

ĐS : a) C_0 là đường thẳng với $m \neq 0$, C_m có tâm $\left(\frac{2m+1}{m};-\frac{1}{m}\right)$,

bán kính $\frac{\sqrt{2m^2 + 3m + 2}}{|m|}$.

b) $x + y - 2 = 0$ (trừ điểm (2; 0)).

05. Cho họ đường tròn $x^2 + y^2 - 2mx - 2(m + 1)y + 2m - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ đường tròn luôn đi qua hai điểm cố định.

b) Chứng minh rằng với mọi m, họ đường tròn luôn cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

(ĐỀ THI ĐH NGOẠI THƯƠNG - 1999)

ĐS : a) (1; 0), (−1; 2); b) $(0; m + 1 \pm \sqrt{m^2 + 2})$.

06. Cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$;

$$(C_2) : x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$$

có tâm lần lượt là I và J.

a) Chứng minh rằng (C_1), (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm H.

b) Gọi d là tiếp tuyến chung không đi qua H của (C_1) và (C_2). Tìm tọa độ giao điểm K của d và IJ. Viết phương trình đường tròn qua K, tiếp xúc với hai đường tròn (C_1), (C_2) tại H.

ĐỀ THI ĐHQG - TPHCM - KHỐI A, 1999

ĐS : $H\left(\frac{19}{5};\frac{7}{5}\right)$; $K(11;11)$; $\left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{5}\right)^2 = 36$.

07. Cho đường tròn : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm M (2; 4).

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn có hệ số góc $k = -1$.

(ĐỀ THI ĐH TÀI CHÍNH KẾ TOÁN HÀ NỘI - 1997)

ĐS : a) $x + y - 6 = 0$; b) $y = -x + 4 \pm 2\sqrt{2}$.

08. Lập phương trình đường tròn nội tiếp trong tam giác có các cạnh lần lượt nằm trên ba đường thẳng $3x - 4y - 35 = 0$, $x - 1 = 0$, $3x + 4y - 35 = 0$.

ĐS : $(x - 5)^2 + y^2 = 16$.

09. Cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$;

$(C_2) : x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$.

a) Chứng minh rằng (C_1) và (C_2) nằm ngoài nhau. Tìm khoảng cách ngắn nhất và dài nhất nối một điểm của (C_1) với một điểm của (C_2).

b) Cho 4 số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b)$

và $c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d)$.

Chứng minh bất đẳng thức sau : $5\sqrt{2} - 7 \le \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \le 5\sqrt{2} + 7$.

ĐS : a) $5\sqrt{2} - 7$; $5\sqrt{2} + 7$.

10. Cho hai đường thẳng $d : 2mx - (m + 1)y + 1 - 3m = 0$

$d' : (3m + 1)x + (m - 1)y + 2 - 6m = 0$.

a) Chứng minh d và d' luôn cắt nhau.

b) Chứng minh rằng giao điểm d và d' ở trên một đường tròn cố định. Tìm phương trình đường tròn đó.

ĐS : b) $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$.

11. Cho họ đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2my + 2m^2 - 1 = 0$.

Chứng tỏ rằng (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định. Viết phương trình hai đường thẳng đó.

ĐS : $x + y \pm \sqrt{2} = 0$.

12. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C) : (x^2 + y^2)\cos\alpha - 3x - 4\cos\alpha = 0$

và đường thẳng $(d) : 3x\sin\alpha - 5y\cos\alpha + 8\sin\alpha\cos\alpha = 0$, $\alpha \in (0; 2\pi)$.

a) Tìm tọa độ giao điểm M_1, M_2 của (C) và (d).

b) Tìm quỹ tích của M_1 và M_2.

c) Chứng tỏ phương tích $\mathscr{P}_{O/(C)}$ không phụ thuộc vào α.

ĐS : a) $M_1(-\cos\alpha; \sin\alpha)$, $M_2(4\cos\alpha; 4\sin\alpha)$.

b) $x^2 + y^2 = 1$. c) $\mathscr{P}_{O/(C)} = -4$.

Chuyên đề 4 : ELIP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

Phương trình chính tắc	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a<b$ $c=\sqrt{b^2-a^2}$
Đồ thị		
Trục lớn Trục nhỏ	Ox; 2a Oy; 2b	Oy; 2b Ox; 2a
Tiêu điểm	$F_1(-c;\ 0)$; $F_2(c;\ 0)$	$F_1(0;\ -c)$; $F_2(0;\ c)$
Tiêu cự	$F_1F_2 = 2c$	$F_1F_2 = 2c$
Tâm sai	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{b}$
Đường chuẩn	$\Delta_1: x=-\frac{a}{e}$; $\Delta_2: x=\frac{a}{e}$	$\Delta_1: y=-\frac{b}{e}$; $\Delta_2: y=\frac{b}{e}$
Tính chất điểm thuộc elip (E)	$M\in(E) \Leftrightarrow MF_1+MF_2=2a$	$M\in(E) \Leftrightarrow MF_1+MF_2=2b$
Bán kính qua tiêu điểm ($M(x; y) \in (E)$)	$F_1M = a + ex$; $F_2M = a - ex$	$F_1M = b + ex$; $F_2M = b - ex$

2. TIẾP TUYẾN CỦA ELIP

Tiếp tuyến với elip (E) tại $(x_0;\ y_0) \in (E)$ là $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

- Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với (E) là :

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2.$$

3. DIỆN TÍCH ELIP

$$S = \pi ab.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA ELIP

A. PHƯƠNG PHÁP

Nếu elip cho dưới dạng chính tắc thì áp dụng các công thức định nghĩa. Nếu elip chưa cho dưới dạng chính tắc thì trước hết đưa về dạng chính tắc và sau đó tiếp tục xác định các yếu tố.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Cho elip : $5x^2 + y^2 = 5$. Hãy tính độ dài trục lớn, trục nhỏ, tọa độ tiêu điểm, tâm sai và viết phương trình các đường chuẩn của elip.

Giải

$5x^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2a = 2$

$b^2 = 5 \Rightarrow \sqrt{5} \quad \Rightarrow 2b = 2\sqrt{5}$.

Vì a < b nên elip có trục lớn nằm trên Oy, hai tiêu điểm F_1F_2 nằm trên Oy.

$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5-1} = 2$

Tọa độ các tiêu điểm là $F_1(0; -2)$, $F_2(0; 2)$.

Tâm sai của elip : $e = \frac{c}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Phương trình đường chuẩn của elip : $\Delta_1 : y = -\frac{b}{c} = -\frac{5}{2}$; $\Delta_2 = \frac{5}{2}$.

Vấn đề 2 : LẬP PHƯƠNG TRÌNH CỦA ELIP

A. PHƯƠNG PHÁP

Để lập phương trình chính tắc của elip ta cần tìm các hệ số a và b. Trong một số trường hợp cần thực hiện các phép tịnh tiến, quay mới đưa được phương trình elip về dạng chính tắc.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 2

Lập phương trình chính tắc của elip đi qua điểm M(1; 1) và có tâm sai $e = \frac{3}{5}$.

Giải

Nếu trục elip nằm trên Ox thì phương trình elip có dạng : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$c^2 = a^2 - b^2$.

Theo giả thiết ta có : $e = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow c = \frac{3a}{5}$

Elip đi qua điểm M(1; 1) nên : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$

Vậy ta có :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \left(\frac{3a}{5}\right)^2 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 - 25b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{25}{16}b^2 \\ 41a^2 = 25a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{41}{16} \\ b^2 = \frac{41}{25} \end{cases}.$$

Vậy phương trình của elip là : $\frac{x^2}{\frac{41}{16}} + \frac{y^2}{\frac{41}{25}} = 1 \Leftrightarrow 16x^2 + 25y^2 = 41$.

Nếu trục lớn của elip nằm trên Oy thì ta có một elip khác thỏa mãn bài toán là $25x^2 + 16y^2 = 41$.

Vấn đề 3 : TÌM ĐIỂM TRÊN ELIP

A. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm, các hệ thức lượng trong tam giác. Có trường hợp điểm cần tìm là giao điểm của elip với một đường khác.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 3

Tìm những điểm trên elip (E) : $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

a) Có bán kính qua tiêu điểm này bằng ba lần bán kính qua tiêu điểm kia.

b) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Giải

Elip (E) có a = 3, b = 1, c = $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$.

Tâm sai $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vì a > b nên hai tiêu điểm của elip là $F_1 = (-2\sqrt{2}; 0)$, $F_2 = (2\sqrt{2}; 0)$.

a) Gọi M là điểm cần tìm thì $F_1M = 3F_2M$ hoặc $F_2M = 3F_1M$

$\Leftrightarrow (F_1M - 3F_2M)(F_2M - 3F_1M) = 0$

$\Leftrightarrow 10.F_1M.F_2M - 3(F_1M^2 + F_2M^2) = 0$

$\Leftrightarrow 16F_1M.F_2M - 3[(F_1M + F_2M)^2 - 2F_1M.F_2M] = 0$

$\Leftrightarrow 16F_1M.\,F_2M - 3(F_1M + F_2M)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 16F_1M.\,F_2M - 3.(2a)^2 = 0 \Leftrightarrow 4F_1M.F_2M = 3a^2$

$\Leftrightarrow 4(a + ex_M)(a - ex_M) = 3a^2$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 4e^2x_M^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x_M^2 = \dfrac{a^2}{4e^2} \Leftrightarrow x_M^2 = \dfrac{81}{32} \Leftrightarrow x_M = \pm\dfrac{9\sqrt{2}}{8}.$

$M \in (E) \Rightarrow y_M^2 = 1 - \dfrac{x_M^2}{9} = 1 - \dfrac{9}{32} = \dfrac{23}{32} \Rightarrow y_M = \pm\dfrac{\sqrt{46}}{8}.$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn bài toán là : $\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{8}; \pm\dfrac{\sqrt{46}}{8}\right), \left(-\dfrac{9\sqrt{2}}{8}; \pm\dfrac{\sqrt{46}}{8}\right).$

b) Những điểm nhìn hai tiêu điểm F_1, F_2 dưới một góc vuông nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $c = 2\sqrt{2}$, có phương trình là $x^2 + y^2 = 8$.

Do đó những điểm cần tìm có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{63}{8} \\ y^2 = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{3\sqrt{14}}{4} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn bài toán là

$$\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{4}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\dfrac{3\sqrt{14}}{4}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Vấn đề 4 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ELIP

A. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng công thức viết phương trình tiếp tuyến với elip tại một điểm nằm trên elip; sử dụng điều kiện để một đường thẳng tiếp xúc với một elip; sử dụng điều kiện tổng quát để hai đường cong tiếp xúc với nhau.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 4

Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai elip :

$$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \quad \text{và} \quad \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1.$$

Giải

Ta tìm tiếp tuyến dạng : $y = kx + c \Leftrightarrow kx - y + c = 0$.

Vì đường thẳng này tiếp xúc với hai elip nói trên, nên theo điều kiện để một đường thẳng tiếp xúc với một elip, ta có :

$$\begin{cases} 25k^2 + 16 = c^2 \\ 16k^2 + 25 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 = 1 \\ c^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \pm 1 \\ c = \pm\sqrt{41} \end{cases}$$

Vậy có bốn tiếp tuyến chung là : $y = \pm x + \sqrt{41}$; $y = \pm x - \sqrt{41}$.

Vì hai elip chỉ có tối đa bốn tiếp tuyến chung, do vậy không có các tiếp tuyến song song với trục tung, tức là tất cả chỉ có bốn tiếp tuyến chung đã chỉ ra.

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ cho hai elip có phương trình :

$$\frac{x^2}{16} + y^2 = 1 \ , \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 .$$

a) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của hai elip.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của hai elip.

Giải

a) Tọa độ của giao điểm của hai elip là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + y^2 = 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{432}{55} \\ y^2 = \frac{28}{55} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{460}{55} .$$

Vậy đường tròn đi qua các giao điểm của hai elip có phương trình :

$$x^2 + y^2 = \frac{92}{11} .$$

b) Đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với elip $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$

$\Rightarrow 16A^2 + B^2 = C^2$; tiếp xúc với elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow 9A^2 + 4B^2 = C^2$

Suy ra A, B, C là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 16A^2 + B^2 = C^2 \\ 9A^2 + 4B^2 = C^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = \frac{3}{55}C^2 \\ B^2 = \frac{7}{55}C^2 \end{cases}$.

Chọn $C = \sqrt{55} \Rightarrow A^2 = 3, B^2 = 7 \Rightarrow A = \pm\sqrt{3}$, $B = \pm\sqrt{7}$.

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai elip là :

$$\sqrt{3}x \pm \sqrt{7}y + \sqrt{55} = 0 ; \quad -\sqrt{3}x \pm \sqrt{7}y + \sqrt{55} = 0 .$$

Bài 2

Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Ký hiệu A(–3; 0), B(3; 0), M(–3; a), N (3; b), trong đó a, b là hai số thay đổi.

a) Xác định tọa độ giao điểm I của các đường thẳng AN và BM.

b) Chứng tỏ rằng để đường thẳng MN tiếp xúc với elip (E) cần và đủ là $ab = 4$.

c) Với a, b thay đổi sao cho MN luôn tiếp xúc với (E), hãy tìm quỹ ttích của điểm I.

Giải

a) AN : $\dfrac{x+3}{3+3} = \dfrac{y-0}{b-0} \Leftrightarrow bx - 6y + 3b = 0$

BM : $\dfrac{x-3}{-3-3} = \dfrac{y-0}{a-0} \Leftrightarrow ax + 6y - 3a = 0$

Giao điểm AN và BM có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} bx - 6y = -3b \\ ax + 6y = 3a \end{cases}$

$D = 6(a + b)$, $D_x = 18(a - b)$, $D_y = 6ab$.

- $a + b \neq 0$: giao điểm I của AN và BN là $I\left(\dfrac{3(a-b)}{a+b}; \dfrac{ab}{a+b}\right)$.
- $a + b = 0$, $ab \neq 0$: AN không cắt BM.
- $a + b = 0$, $ab = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$: $AN \equiv BM \equiv AB$.

b) MN : $\dfrac{x+3}{3+3} = \dfrac{y-a}{b-a} \Leftrightarrow (b-a)x - 6y + 3(a+b) = 0$

Điều kiện cần và đủ để MN tiếp xúc với elip là :

$$9(b-a)^2 + 4(-6)^2 = 3^2(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow 9(a^2 - 2ab + b^2) + 144 = 9(a^2 + 2ab + b^2) \Leftrightarrow ab = 4.$$

c) MN tiếp xúc với elip thì $ab = 4 \Rightarrow a + b \neq 0$ và $ab \neq 0$

Thay $ab = 4$ vào tọa độ của I, ta được :

$$I : \begin{cases} x = \dfrac{3(a-b)}{a+b} \\ y = \dfrac{4}{a+b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{9(a^2 - 2ab + b^2)}{(a+b)^2} \\ y = \dfrac{4}{a+b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{9(a^2 + 2ab + b^2) - 36ab}{(a+b)^2} = 9 - \frac{144}{(a+b)^2} = 9 - 9.\left(\frac{4}{a+b}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 - 9y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Vì tung độ của I : $y = \dfrac{4}{a+b} \neq 0$ nên quỹ tích của I là elip $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$ trừ hai giao điểm của elip này với trục hoành (tức là trừ hai điểm (3; 0) và (–3; 0)).

Bài 3

> Cho elip có phương trình $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. Viết phương trình các cạnh của hình vuông ngoại tiếp elip (tức các cạnh của hình vuông đều tiếp xúc với elip).

Giải

Giả sử $Ax + By + C = 0$ và $Ax + By + C' = 0$ là hai cạnh song song của hình vuông. Do các cạnh này tiếp xúc với elip nên :

$$\begin{cases} 6A^2 + 3B^2 = C^2 \\ 6A^2 + 3B^2 = C'^2 \end{cases} \Rightarrow C^2 = C'^2 \text{ nhưng vì } C \neq C' \text{ nên } C' = -C.$$

Vậy một cặp cạnh song của hình vuông có dạng :

$$d_1, d_2 : Ax + By \pm C = 0, \quad 6A^2 + 3B^2 = C^2 \qquad (1)$$

Tương tự, cặp cạnh song song thứ hai của hình vuông vuông góc với cặp nói trên nên có dạng

$$\Delta_1, \Delta_2 : Bx - Ay \pm D = 0; \quad 6B^2 + 3A^2 = D^2 \qquad (2)$$

Vì gốc tọa độ O là tâm của hình vuông nên khoảng cách từ các cạnh đến O bằng nhau $\Rightarrow |C| = |D|$.

Từ (1) và (2) : $\begin{cases} 6A^2 + 3B^2 = C^2 \\ 3A^2 + 6B^2 = C^2 \end{cases} \Rightarrow A^2 = B^2 = \frac{C^2}{9} \Rightarrow |C| = 3|A|$

Vậy các cặp cạnh song song của hình vuông là :

$$Ax + Ay \pm 3|A| = 0; \quad Ax - Ay \pm 3|A| = 0.$$

Chọn $A = 1$, ta được các cạnh của hình vuông là :

$$x + y \pm 3 = 0; \quad x - y \pm 3 = 0.$$

Bài 4

> Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng Δ có phương trình $3x + 4y + 24 = 0$.
>
> a) Tìm điểm M trên elip có khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất đến đường thẳng Δ.
>
> b) Chứng minh rằng tại những M tìm được ở a) đều có tiếp tuyến song song với Δ.

Giải

a) Gọi $M(x_0; y_0)$ là một điểm thuộc (E). Ta có : $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1$.

Khoảng cách từ M đến Δ là : $d = \frac{|3x_0 + 4y_0 + 24|}{5}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpsky

$$|3x_0 + 4y_0| = \left|9.\frac{x_0}{3} + 8.\frac{x_0}{2}\right| \le \sqrt{9^2 + 8^2}.\sqrt{\frac{x_0^2}{9} + \frac{x_0^2}{4}} = \sqrt{145}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{145} \le 3x_0 + 4y_0 \le \sqrt{145} \Rightarrow 24 - \sqrt{145} \le 3x_0 + 4y_0 + 24 \le 24 + \sqrt{145}$$

Vì $24 - \sqrt{145} > 0$ nên mind $= \dfrac{24 - \sqrt{145}}{5}$, đạt được khi

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{27} = \dfrac{y_0}{16} \\ 3x_0 + 4y_0 = -\sqrt{145} \end{cases} \Rightarrow M_1 = \begin{cases} x_0 = \dfrac{-27\sqrt{145}}{145} \\ y_0 = \dfrac{-16\sqrt{145}}{145} \end{cases}$$

maxd $= \dfrac{24 + \sqrt{145}}{5}$, đạt được khi $\begin{cases} \dfrac{x_0}{17} = \dfrac{x_0}{16} \\ 3x_0 + 4y_0 = \sqrt{145} \end{cases} \Rightarrow M_2 : \begin{cases} x_0 = \dfrac{27\sqrt{145}}{145} \\ y_0 = \dfrac{\sqrt{145}}{145} \end{cases}$

b) Tiếp tuyến với (E) tại $M(x_0; y_0)$ có phương trình

$\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}.x + \dfrac{b^2}{y_0}$ nên có hệ số góc là $-\dfrac{b^2}{a^2}.\dfrac{x_0}{y_0}$.

$\Delta : 3x + 4y + 24 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{4}x - 6$, có hệ số góc là $-\dfrac{3}{4}$

Tại M_1 và M_2, ta đều có hệ số góc của tiếp tuyến là $-\dfrac{4}{9}.\dfrac{27}{16} = -\dfrac{3}{4}$.

Vì có hệ số góc bằng nhau nên các tiếp tuyến tại M_1 và M_2 song song với Δ.

Bài 5

Cho elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$.

a) Gọi E là điểm tùy ý của elip. Chứng minh $b \le OE \le a$.

b) Gọi A, B là hai điểm thuộc elip sao cho $OA \perp OB$. Xác định vị trí A, B trên elip để tam giác OAB có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.

(ĐỀ THI ĐH XÂY DỰNG - 1996)

Giải

a) Xét điểm E(x; y) tùy ý thuộc elip, ta có :

$$b = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2} \le x^2 + y^2 = OE \le \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2} = a\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = a.$$

Vậy $b \le OE \le a$.

b) Nếu OA nằm trên một trục thì OB nằm trên trục kia. Trường hợp này $S_{OAB} = \frac{ab}{2}$. Trường hợp OA không nằm trên trục nào, giả sử OA có phương trình $y = kx$, $k \neq 0$. Thì OB có phương trình $y = -\frac{1}{k}x$.

Giả sử $A(x_0; kx_0)$. Khi đó : $OA^2 = x_0^2 + y_0^2 = x_0^2(1 + k^2)$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{k^2x_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_0^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + k^2a^2}$$

Từ đó $OA^2 = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2 + k^2a^2}$.

Tương tự, giả sử $B\left(x_1; -\frac{1}{k}x_1\right)$, ta có

$$OB^2 = \frac{a^2b^2\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}{b^2 + \frac{1}{k^2}} = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2 + k^2b^2}.$$

Vậy $$(S_{ABC})^2 = \frac{1}{4}\frac{a^4b^4(1+k^2)^2}{(b^2 + k^2a^2)(a^2 + k^2b^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{a^4b^4(1+k)^2}{a^2b^2(1+k^2)^2 + (a^2 - b^2)k^2} = \frac{1}{4}\frac{a^4b^4}{a^2b^2 + (a^2 - b^2).\frac{k^2}{(1+k^2)^2}}$$

Vì $0 < \frac{k^2}{(1+k^2)} \leq \frac{1}{4}\ \forall k > 0$ nên $\frac{a^4b^4}{(a^2 + b^2)^2} \leq (S_{ABC})^2 < \frac{1}{4}a^2b^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \leq S_{ABC} < \frac{1}{2}ab.$$

Từ đó $\max S_{ABC} = \frac{ab}{2}$, khi OA, OB nằm trên hai trục toạ độ.

$\min S_{ABC} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ khi $k = \pm 1$, tức khi OA, OB nằm trên hai đường phân giác của các góc tọa độ.

Bài 6

Biết rằng elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nhận các đường thẳng $3x - 2y - 20 = 0$ và $x + 6y - 20 = 0$ làm tiếp tuyến. Hãy viết phương trình của elip.

Giải

Đường thẳng $3x - 2y - 20 = 0$ tiếp xúc với elip $\Rightarrow 9a^2 + 4b^2 = 400$

Đường thẳng $x + 6y - 20 = 0$ tiếp xúc với elip $\Rightarrow a^2 + 36b^2 = 400$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9a^2 + 4b^2 = 400 \\ a^2 + 36b^2 = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 40 \\ b^2 = 10 \end{cases}$$

Vậy phương trình elip là : $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

Bài 7

a) Một đường kính bất kỳ của elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cắt elip tại M và N. Chứng minh các tiếp tuyến với elip tại M và N song song với nhau.

b) Tìm mối quan hệ giữa a, b, k, m để (E) tiếp xúc với đường thẳng :

$$y = kx + m.$$

Giải

a) Đường kính bất kỳ của elip cắt elip tại hai điểm đối xứng $M(x_0; y_0)$ và $N(-x_0; -y_0)$. Phương trình tiếp tuyến tại M và N lần lượt là :

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

$$-\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = -1.$$

Vậy hai tiếp tuyến song song với nhau.

b) $\Delta : y = kx + m \Leftrightarrow kx - y + m = 0$

Δ tiếp xúc với elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2k^2 + b^2 = m^2$.

Bài 8

Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$. Δ là một tiếp tuyến với elip cắt các đường thẳng $x = a$ và $x = -a$ lần lượt tại M và N. Xác định Δ sao cho tam giác FMN có diện tích nhỏ nhất, trong đó F là một trong hai tiêu điểm của elip.

Giải

Giả sử Δ tiếp xúc với (E) tại $(x_0; y_0)$. Khi đó;

$$\Delta : \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \ ; \ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Đường thẳng $x = a$ cắt Δ tại M $\Rightarrow \frac{x_0a}{a^2} + \frac{y_0y_M}{b^2} = 1 \Rightarrow y_M = \frac{b^2}{y_0}\frac{a - x_0}{a}$.

Đường thẳng $x = -a$ cắt Δ tại N $\Rightarrow \frac{-x_0a}{a^2} + \frac{y_0y_N}{b^2} = 1 \Rightarrow y_N = \frac{b^2}{y_0}\frac{a + x_0}{a}$.

Giả sử α = ±c. Khi đó một trong hai tiêu điểm của (E) là F(α, 0). Ta có :

$$\overrightarrow{FM} = \left(a - \alpha;\ \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right)\right),\ \overrightarrow{FN} = \left(-a - \alpha;\ \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FN} = -(a^2 - \alpha^2) + \frac{b^4}{{y_0}^2}\left(1 - \frac{{x_0}^2}{a^2}\right) = -(a^2 - c^2) + b^2 = 0$$

⇒ tam giác FMN vuông tại F

$$\Rightarrow S_{FMN} = \frac{1}{2}FM.FN$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a-\alpha)^2 + \left(\frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right)\right)^2}\sqrt{(a+\alpha)^2 + \left(\frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right)\right)^2}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski

$$S_{FMN} \geq \frac{1}{2}\left|(a+\alpha)(a-\alpha) + \frac{{b_0}^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right).\frac{{b_0}^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|a^2 - c^2 + \frac{{b_0}^4}{{y_0}^2}\left(1 - \frac{{x_0}^2}{a^2}\right)\right| = b^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a-\alpha}{a+\alpha} = \frac{a - x_0}{a + x_0} \Leftrightarrow x_0 = \alpha \pm c.$

Vậy $\min S_{FMN} \Leftrightarrow x_0 = \pm c,\ y_0 = \pm\frac{b^2}{a}$. Trường hợp này Δ có phương trình là :

$$\frac{cx}{a^2} \pm \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow cx \pm ay - a^2 = 0 \text{ nếu } F(c; 0)$$

$$-\frac{cx}{a^2} \pm \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow cx \pm ay + a^2 = 0 \text{ nếu } F(-c; 0).$$

Bài 9

Cho elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, điểm A(−2; 0) và điểm M chạy trên elip. Gọi H là hình chiếu của M lên trục Oy. Giả sử AH cắt OM tại P. Chứng minh rằng khi M chạy trên elip thì P chạy trên một đường cong (C) cố định. Tìm đường cong (C).

(ĐỀ THI HV QUAN HỆ QUỐC TẾ - 1997)

Giải

Giả sử OM có phương trình x = ky. Tung độ của M là nghiệm của phương trình $\frac{k^2y^2}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{k^2+4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{k^2+4}}$.

Vậy : $H\left(0; \pm \frac{2}{\sqrt{k^2+4}}\right)$.

Phương trình của AH là : $\frac{x+2}{0+2} = \frac{y-0}{\pm\frac{2}{\sqrt{k^2+2}} - 0} \Leftrightarrow x + 2 = \pm\, y\sqrt{k^2+4}$

Từ đó tọa độ của P :

$$P : \begin{cases} x = ky \\ x + 2 = \pm\, y\sqrt{k^2+4} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4y^2} = \pm(x+2) \Rightarrow y^2 = x + 1.$$

Trường hợp M nằm trên trục Oy thì M ≡ H, do đó AH cắt OM tại M. Suy ra P ≡ M (0; +1), cũng thuộc parabol $y^2 = x + 1$.

Vậy khi M chạy trên (E) thì P chạy trên đường cong (C) : $y^2 = x + 1$.

Bài 10

Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$. Hình chữ nhật (Q) gọi là hình chữ nhật ngoại tiếp (E) nếu mỗi cạnh của (Q) đều tiếp xúc với (E). Hãy xác định hình chữ nhật ngoại tiếp (E).

a) Có diện tích nhỏ nhất. b) Có diện tích lớn nhất.

Giải

Vì hai cạnh liên tiếp của hình chữ nhật vuông góc với nhau nên chúng có phương trình $Ax + By + C = 0$; $Bx - Ay + C' = 0$, ta có thể chọn để :

$$A^2 + B^2 = 1,\ C > 0,\ C' > 0.$$

Vì các cạnh này tiếp xúc với elip nên $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$; $a^2B^2 + b^2A^2 = C'^2$

Khoảng cách từ O đến hai cạnh nói trên là :

$$OH = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = C,\quad OK = \frac{|C'|}{\sqrt{B^2+A^2}} = C'$$

Vì O cũng là tâm của hình chữ nhật ngoại tiếp nên diện tích S của hình chữ nhật là : $S = 4.OH.OK = 4CC'$.

Đặt $T = S^2$. Ta có :

$$\begin{aligned} T &= 16C^2C'^2 = 16(a^2A^2 + b^2B^2)(a^2B^2 + b^2A^2) \\ &= 16[(a^4 + b^4)A^2B^2 + (A^4 + B^4)a^2b^2] \\ &= 16[(a^4 + b^4)A^2B^2 + ((A^2 + B^2)^2 - 2A^2B^2)a^2b^2] \\ &= 16[(a^4 + b^4)A^2B^2 + (1 - 2A^2B^2)a^2b^2] \\ T &= 16[(a^2 - b^2)^2A^2B^2 + a^2b^2]. \end{aligned}$$

Suy ra $16a^2b^2 \le T \le 16[(a^2 - b^2).\left(\frac{A^2+B^2}{2}\right)^2 + a^2b^2]$

$$\Rightarrow 16a^2b^2 \le T \le 4[(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2]$$

$\Rightarrow 16a^2b^2 \le T \le 4(a^2 + b^2)^2 \Rightarrow 4ab \le S \le 2(a^2 + b^2)$.

Vậy min $S = 4ab$ khi $A = 0$ hoặc $B = 0$, tức là hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục : $x = \pm a$; $y = \pm b$.

$$\max S = 2(a^2 + b^2) \text{ khi } A^2.B^2 = \left(\frac{A^2 + B^2}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow A^2 = B^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow C^2 = C'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$, phương trình các cạnh của hình chữ nhật là :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow x + y \pm \sqrt{a^2 + b^2} = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow x - y \pm \sqrt{a^2 + b^2} = 0.$$

Chú ý : *max S $\Leftrightarrow$ hình chữ nhật ngoại tiếp là hình vuông.*

Bài 11

Trong mặt phẳng cho elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa k và m để đường thẳng d : $y = kx + m$, tiếp xúc với elip (E).

b) Khi d là tiếp tuyến của elip (E), gọi giao điểm của d với đường thẳng $x = 5$ và $x = -5$ là M và N. Tính diện tích tam giác FMN theo k, trong đó F là tiêu điểm của (E) với hoành độ dương.

c) Xác định K để tam giác FMN có diện tích nhỏ nhất.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN - 2000)

Giải

a) d : $kx - y + m = 0$;

d tiếp xúc với elip $\Leftrightarrow k^2.25 + (-1)^2.16 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - 25k^2 = 16$.

b) Gọi M là giao điểm của d và $x = 5$ thì $M(5;\ 5k + m)$, N là giao điểm của d và $x = -5$ thì $N(-5;\ -5k + m)$. Tiêu điểm có hoành độ dương của elip là $F(3;\ 0)$. Ta có :

$$\overrightarrow{FM} = (2;\ 5k + m),\ \overrightarrow{KN} = (-8;\ m - 5k)$$

Vì $\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{KN} = -16 + m^2 - 25k^2 = 0$ (do a)), nên tam giác FMN vuông tại F. Từ đó :

$$S_{FMN} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{FM}\right|.\left|\overrightarrow{FN}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + (5k + m)^2}\sqrt{64 + (m - 5k)^2}.$$

c) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có :

$$S_{FMN} \geq \frac{1}{2}[(2.8 + (m + 5k)(m - 5k)] = \frac{1}{2}(16 + m^2 - 25k^2)$$

$$= \frac{1}{2}(16 + 16) = 16$$

Đẳng thức xảy ra khi : $\dfrac{m + 5k}{2} = \dfrac{m - 5k}{8} \Leftrightarrow 25k = -3m$

Kết hợp với $m^2 - 25k^2 = 16$, ta được $k = \pm\dfrac{3}{5}$.

Vậy $k = \pm\dfrac{3}{5}$ thì S_{FMN} nhỏ nhất. (Xem và so sánh với Bài 8)

Bài 12

a) Cho elip $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ các tiêu điểm của elip tới một tiếp tuyến bất kỳ của nó là một hằng số.

b) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của elip đã cho với elip $\dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1$.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC NÔNG NGHIỆP I, KHỐI B, 2000)

Giải

a) Hai tiêu điểm của elip là $F_1(-\sqrt{5}\,;\,0)$ và $F_2(\sqrt{5}\,;\,0)$.

Tiếp tuyến với elip tại điểm $(x_0; y_0)$ bất kỳ thuộc elip có phương trình là :

$$\Delta : \frac{xx_0}{9} = \frac{yy_0}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0}{9}.x + \frac{y_0}{4}y - 1 = 0$$

Từ đó : $$d(F_1; \Delta) = \frac{\left|-x_0\dfrac{\sqrt{5}}{9} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{9^2} + \dfrac{y_0^2}{4^2}}} = \frac{\left|x_0\dfrac{\sqrt{5}}{9} + 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{9^2} + \dfrac{y_0^2}{4^2}}}$$

$$d(F_2; \Delta) = \frac{\left|x_0\dfrac{\sqrt{5}}{9} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{9^2} + \dfrac{y_0^2}{4^2}}}$$

Suy ra : $$d(F_1; \Delta).d(F_2; \Delta) = \frac{\left|\dfrac{5}{9^2}x_0^2 - 1\right|}{\dfrac{x_0^2}{9^2} + \dfrac{y_0^2}{4^2}}$$

Vì $\dfrac{x_0^2}{9^2} + \dfrac{y_0^2}{4^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y_0^2}{4} = 1 - \dfrac{x_0^2}{9}$, thay vào biểu thức tìm được và rút gọn ta có : $d(F_1; \Delta).d(F_2; \Delta) = 4$ không đổi.

b) Tọa độ các giao điểm của hai elip là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ \dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ x^2 + 16y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 25y^2 = 52 \\ 3x^2 - 7y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 25y^2 = 52 \\ 6x^2 - 14y^2 = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11x^2 + 11y^2 = 92 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{92}{11}.$$

Vậy 4 giao điểm của hai elip nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = \dfrac{92}{11}$, nói cách khác trên đường tròn đi qua các giao điểm của hai elip có phương trình là :

$$x^2 + y^2 = \frac{92}{11}.$$

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau :

a) Có bốn đỉnh $A_1(-6; 0)$, $A_2(6; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.

b) Có tâm sai $e = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và độ dài nửa trục lớn là 3.

c) Có tiêu cự $2c = 8$, tâm sai $e = \dfrac{1}{2}$.

ĐS : a) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{6} = 1$ hoặc $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

c) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$ hoặc $\dfrac{x^2}{48} + \dfrac{y^2}{64} = 1$.

02. Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E) : $x^2 + 4y^2 = 4$ và hai điểm $M(-2; m)$, $N(2; n)$.

a) Gọi A_1, A_2 là các đỉnh của elip trên trục lớn. Hãy viết phương trình các đường thẳng A_1N và A_2M. Tìm giao điểm của chúng.

b) Cho MN thay đổi sao cho nó luôn tiếp xúc với (E). Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN.

ĐS : a) $I\left(\dfrac{2(m-n)}{m+n}; \dfrac{mn}{m+n}\right)$ b) $\dfrac{x^2}{4} + 4y^2 = 1$.

03. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và hai đường thẳng d : $ax - by = 0$, d' : $ax + by = 0$, $a^2 + b^2 > 0$.

a) Xác định giao điểm M, N của d với (E), giao điểm P, Q của d' với (E).

b) Tính theo a, b diện tích tứ giác MPNQ.

c) Tìm điều kiện a, b để diện tích ấy lớn nhất.

d) Tìm điều kiện a, b để diện tích ấy nhỏ nhất.

ĐS : a) $\left(\frac{\pm 6b}{\sqrt{9a^2+4b^2}}; \frac{\pm 6a}{\sqrt{9a^2+4b^2}}\right); \left(\frac{\pm 6b}{\sqrt{9a^2+4b^2}}; \frac{\mp 6a}{\sqrt{9a^2+4b^2}}\right)$

b) $S = \frac{72(a^2+b^2)}{\sqrt{9a^2+4b^2}\sqrt{4a^2+9b^2}}$ c) $ab = 0$;   d) $|a| = |b|$.

04. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{8} = 1$. Một đường thẳng tiếp xúc với (E) tại M cắt hai trục tọa độ tại A và B. Xác định các vị trí của M để diện tích tam giác OAB nhỏ nhất

ĐS : (–5; –2), (–5; 2), (5; –2), (5; 2).

05. Cho elip (E) : $4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm M(1, 1). Đường thẳng d qua M cắt (E) tại P, Q.

a) Xác định d để MP = MQ.

b) Gọi N là trung điểm của PQ. Chứng minh khi d quay quanh M, điểm N chạy trên một elip cố định.

ĐS : a) $4x + 9y - 13 = 0$;   b) $\frac{16\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{13} + \frac{36\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{13} = 1$.

06. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Một điểm P di động ở bên ngoài elip. Từ P kẻ hai tiếp tuyến PM, PN đến (E), tiếp xúc với (E) tại M, N.

a) Tìm quỹ tích điểm P sao cho PM ⊥ PN.

b) Khi P chạy trên đường thẳng d : $4x + 3y - 24 = 0$. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS : a) $x^2 + y^2 = 25$;   b) $\left(\frac{8}{3}; \frac{9}{8}\right)$.

07. Qua tâm O của elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dựng hai nửa đường thẳng vuông góc với nhau cắt elip tại M, M'. Chứng minh rằng :

a) $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

b) Dây MM' tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

08. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Gọi F_1, F_2 là tiêu điểm, A_1A_2 là trục lớn của elip. O là tâm của elip và M là một điểm tùy ý trên elip.

a) Chứng minh $F_1M.F_2M + OM^2 = a^2 + b^2$.

b) Chứng minh $(F_1M - F_2M)^2 = 4(OM^2 - b^2)$.

c) Gọi P là hình chiếu của M trên A_1A_2. Chứng minh : $\frac{MP^2}{A_1P.A_2P} = \frac{b^2}{a^2}$.

Chuyên đề 5 : **HYPEBOL**

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. CÁC DẠNG CHÍNH TẮC CỦA HYPEBOL

Phương trình chính tắc	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
Đồ thị		
Trục thực Trục ảo	Ox, 2a Oy, 2b	Oy, 2b Ox, 2a
Tiêu điểm	$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$	$F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$
Tiêu cự	$F_1F_2 = 2c$	$F_1F_2 = 2c$
Tâm sai	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Đường chuẩn	$\Delta_1 : x = -\frac{a}{e}; \Delta_2 : x = \frac{a}{e}$	$\Delta_1 : y = -\frac{b}{e}; \Delta_2 : y = \frac{b}{e}$
Tính chất điểm thuộc hypebol (H)	$M \in (H)$ $\Leftrightarrow \lvert MF_1 - MF_2 \rvert = 2a$	$M \in (H)$ $\Leftrightarrow \lvert MF_1 - MF_2 \rvert = 2b$
Bán kính qua tiêu điểm ($M(x; y) \in (H)$)	$F_1M = \lvert ex + a \rvert$ $F_2M = \lvert ex - a \rvert$	$F_1M = \lvert ex + b \rvert$ $F_2M = \lvert ex - b \rvert$

2. TIẾP TUYẾN CỦA HYPEBOL

Phương trình tiếp tuyến với (H) tại $(x_0; y_0) \in (H)$

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1 \quad \left(\frac{y_0y}{b^2} - \frac{x_0x}{a^2} = 1\right)$$

Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với (H) là :

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2 \quad (B^2b^2 - A^2a^2 = C^2).$$

3. HÌNH CHỮ NHẬT CƠ SỞ. TIỆM CẬN

Hình chữ nhật cơ sở của (H) có các cạnh $x = \pm a$, $y = \pm b$

Hypebol (H) có hai đường tiệm cận là $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Đường tiệm cận là đường chéo của hình chữ nhật cơ sở.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA HYPEBOL

A. PHƯƠNG PHÁP

Đưa phương trình về dạng chính tắc, xác định các yếu tố theo công thức.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Xác định độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, tiêu điểm, hình chữ nhật cơ sở, đường chuẩn của hypebol (H) : $9x^2 - 16y2 - 144 = 0$.

Giải

(H) : $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

(H) có trục thực Ox, a = 4, b = 3, $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Từ đó : Trục thực 2a = 8; trục ảo 2b = 6

Tiêu cự 2c = 10; tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

Hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm 4$; $y = \pm 3$.

Phương trình hai tiệm cận $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Phương trình hai đường chuẩn : $x = \pm \frac{16}{5}$.

Vấn đề 2 : LẬP PHƯƠNG TRÌNH HYPEBOL

A. PHƯƠNG PHÁP

Cần tìm các hệ số a, b trong phương trình chính tắc của hypebol. Có trường hợp phải dùng phép tịnh tiến hoặc phép quay.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 2

Lập phương trình chính tắc của hypecbol (H) đi qua điểm (–3; 2) và có phương trình hai đường chuẩn là $y = \pm\frac{1}{2}$.

Giải

Vì đường chuẩn song song với trục Ox nên phương trình chính tắc của hypebol có dạng : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

- $\frac{b}{e} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2b^2 = c \Rightarrow 4b^4 = c^2 \Rightarrow 4b^4 = a^2 + b^2$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2(4b^2 - 1) \quad (*).$$

• $(-3; 2) \in (H) \Rightarrow \frac{4}{b^2} - \frac{9}{a^2} = 1 \Rightarrow 4a^2 - 9b^2 = a^2 b^2$

Thay biểu thức (*) vào, ta có :

$$4b^2(4b^2 - 1) - 9b^2 = b^4(4b^2 - 1) \Leftrightarrow 4(4b^2 - 1) - 9 = b^2(4b^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4b^4 - 17b^2 + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 1 \quad \Rightarrow a^2 = 3 \\ b^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow a^2 = 39 \end{array}\right.$$

Vậy có hai hypebol thỏa mãn bài toán $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$; $\frac{4y^2}{13} - \frac{x^2}{39} = 1$.

Vấn đề 3 : TÌM ĐIỂM Ở TRÊN HYPEBOL

A. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm; đưa về giao điểm của hypebol với một đường khác.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 3

Cho hypebol (H) : $9x^2 - y^2 - 9 = 0$.

Tìm điểm trên hypebol nhìn hai tiêu điểm dưới một góc $\frac{\pi}{3}$.

Giải

Gọi M(x; y) là tiêu điểm thuộc (H) nhìn F_1F_2 dưới một góc $\frac{\pi}{3}$.

Theo định lý cosin trong tam giác, ta có :

$$F_1F_2^2 = F_1M^2 + F_2M^2 - 2F_1M.F_2M\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow F_1F_2^2 = (F_1M - F_2M)^2 + F_1MF_2M$$

$$\Rightarrow 4c^2 = 4a^2 + |ex + a|\,|ex - a| \Rightarrow 4c^2 = 4a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - a^2$$

$$\Rightarrow 40 = 4 + 10x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{37}{10} \Rightarrow x_M = \pm\frac{\sqrt{370}}{10}$$

$$y^2_M = 9x^2_M - 9 = \frac{9.27}{10} \Rightarrow y_M = \pm\frac{9\sqrt{30}}{10}.$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn bài toán là :

$$\left(\frac{\sqrt{370}}{10}; \pm\frac{9\sqrt{30}}{10}\right), \left(-\frac{\sqrt{370}}{10}; \pm\frac{9\sqrt{30}}{10}\right).$$

Vấn đề 4 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA HYPEBOL

A. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng công thức tìm tiếp tuyến tại một điểm nằm trên hypebol; sử dụng điều kiện để một đường thẳng tiếp xúc với hypebol; sử dụng phương pháp chung để tìm tiếp tuyến với một đường cong.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 4

Cho hypebol (H) : $4x^2 - y^2 = 4$

a) Viết phương trình tiếp tuyến với (H) tại điểm M(1; 0).

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (H) đi qua điểm N(1; 4).

Giải

a) (H) : $4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Vì $M \in (H)$ nên phương trình tiếp tuyến qua M(1; 0) là : $x.1 - \dfrac{y.0}{4} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

b) Ta tìm tiếp tuyến dạng : $Ax + By + C = 0$

Tiếp tuyến đi qua N(1; 4) $\Rightarrow A + 4B + C = 0$

Tiếp tuyến tiếp xúc với (H) $\Rightarrow A^2 - 4B^2 = C^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -(4B + C) \\ A^2 - 4B^2 = C^2 \end{cases} \Rightarrow (4B + C)^2 - 4B^2 = C^2 \Leftrightarrow 12B^2 + 8BC = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ B = -\dfrac{2C}{3} \end{array}\right.$$

- $B = 0 \Rightarrow A = -C$. Chọn C = 1, ta được tiếp tuyến $x - 1 = 0$.
- $B = -\dfrac{2C}{3} \Rightarrow A = \dfrac{5C}{3}$. Chọn C = 3, ta được tiếp tuyến $5x - 2y + 3 = 0$.

Vậy có hai tiếp tuyến đi qua N là $x - 1 = 0$ và $5x - 2y + 3 = 0$.

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

Cho hypebol $64x^2 - 169y^2 = -10816$. Xác định tiêu điểm và các đường tiệm cận.

Giải

$$64x^2 - 169y^2 = -10816 \Leftrightarrow \frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{169} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,\ b = 8,\ a = 13.$$

Hypebol có trục thực nằm trên Oy, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{233}$.

Vậy hypecbol có tiêu điểm là $F_1\left(0;-\sqrt{233}\right)$, $F_2\left(0;\sqrt{233}\right)$

có hai tiệm cận là $y = \pm\dfrac{8}{13}x$.

Bài 2

> Viết phương trình hypebol đi qua điểm M (24; 5) và có hai đường tiệm cận là 5x + 12y = 0 và 5x − 12y = 0.

Giải

Vì hai đường tiệm cận đối xứng với nhau qua các trục tọa độ nên phương trình hypebol có dạng : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$.

Các đường tiệm cận là $y=\pm\dfrac{5}{12}x \Rightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{12}$

Điểm M(24; 5) thuộc hypebol $\Rightarrow \dfrac{576}{a^2}-\dfrac{25}{b^2}=\pm 1$

- $\begin{cases} \dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{576}{a^2}-\dfrac{25}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5a}{12} \\ 576.\dfrac{25a^2}{144}-25a^2=a^2.\dfrac{25a^2}{144} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5a}{12} \\ a^2=3.144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=432 \\ b^2=75 \end{cases}.$$

Ta được hypebol : $\dfrac{x^2}{432}-\dfrac{y^2}{75}=1$.

- $\begin{cases} b=\dfrac{5a}{12} \\ \dfrac{576}{a^2}-\dfrac{25}{b^2}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5a}{12} \\ a^2=-3.144 \end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm.

Vậy chỉ có hypebol $\dfrac{x^2}{432}-\dfrac{y^2}{75}=1$ thỏa mãn bài toán.

Bài 3

> Lập phương trình chính tắc của hypebol với Ox là trục thực, tổng hai bán trục a + b = 7, phương trình hai tiệm cận là $y=\pm\dfrac{3}{4}x$.
>
> a) Tính độ dài các trục.
>
> b) Lập phương trình tiếp tuyến của hypebol song song với đường thẳng 5x − 4y + 10 = 0.
>
> (ĐỀ THI ĐH ĐÀ NẴNG – KHỐI D – 1997)

Giải

Phương trình của hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vì hai đường tiệm cận là $y = \pm \frac{b}{a}x$ nên ta có $\begin{cases} a + b = 7 \\ \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$.

Vậy phương trình của hypecbol là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

a) Độ dài trục thực $2a = 8$; độ dài trục ảo $2b = 6$.

b) Tiếp tuyến song song với $5x - 4y + 10 = 0$ nên có dạng $5x - 4y + m = 0$.

Từ điều kiện để một đường thẳng tiếp xúc với hypebol, ta có :

$$5^2.16 - 4^2.9 = m^2 \Leftrightarrow m^2 = 256 \Leftrightarrow m = \pm 16.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn bài toán là :

$$5x - 4y + 16 = 0; \quad 5x - 4y - 16 = 0.$$

Bài 4

Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ của hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ đến các tiệm cận của nó là một số không đổi.

Giải

Hypebol có hai tiệm cận là $d_1 : y = -\frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx + ay = 0$

$d_2 : y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx - ay = 0$.

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm bất kỳ thuộc hypebol. Khi đó :

$$d(M, d_1) = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad d(M, d_2) = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow d(M, d_1).d(M, d_2) = \frac{|(bx_0 + ay_0)(bx_0 - ay_0)|}{a^2 + b^2} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{\left|\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right| a^2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \text{ không đổi.}$$

Bài 5

Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ký hiệu $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ là hai đỉnh của hypebol.

Từ một điểm M trên hypebol dựng tiếp tuyến MT với đường tròn đường kính A_1A_2 và một đường thẳng song song với tiệm cận $y = \frac{b}{a}x$, đường thẳng này cắt trục thực tại P. Chứng minh rằng MP = MT.

Giải

Giả sử $M(x_0; y_0) \in H$. Vì tam giác OMT vuông tại T nên :

$$MT^2 = OM^2 - OT^2 = x_0^2 + y_0^2 - a^2 \quad (*)$$

Ký hiệu $P(x_1, 0)$. Vì MP song song với $y = \frac{b}{a}x$ nên hệ số góc :

$$\frac{-y_0}{x_1 - x_0} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1 - x_0 = -\frac{ay_0}{b}$$

Từ đó : $MP^2 = (x_1 - x_0)^2 + y_0^2 = \frac{a^2y_0^2}{b^2} + y_0^2$

$$= a^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} - 1\right) + y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 - a^2.$$

So sánh với (*) ta có $MT^2 = MP^2 \Rightarrow MT = MP$.

Bài 6

Hai đường cong gọi là trực giao với nhau tại A nếu chúng cắt nhau tại A và tại đó hai tiếp tuyến của hai đường cong là vuông góc với nhau.

Tìm điều kiện của a, b, c, d để tại mọi giao điểm của chúng, elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và hypebol (H) $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$ là trực giao với nhau.

Giải

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là một giao điểm của (E) và (H). Hai tiếp tuyến tại M của (E) và (H) là $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ và $\frac{x_0x}{c^2} - \frac{y_0y}{d^2} = 1$

Hai tiếp tuyến này vuông góc $\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}.\frac{x_0}{c^2} - \frac{y_0}{b^2}.\frac{y_0}{d^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2.c^2}{b^2d^2} \quad \text{và} \quad \frac{x_0^2}{c^2} = \frac{y_0^2a^2}{b^2d^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0^2c^2}{b^2d^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \text{và} \quad \frac{y_0^2a^2}{b^2d^2} - \frac{y_0^2}{d^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0^2c^2}{b^2d^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{y_0^2a^2}{b^2d^2} - \frac{y_0^2}{d^2} \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2d^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2}{b^2d^2} - \frac{1}{d^2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 + d^2 = a^2 - b^2.$$

Bài 7

Cho hypecbol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và một tiếp tuyến bất kỳ của (H) l
d : Ax + By + C = 0 ($A^2 + B^2 > 0$) tiếp xúc với (H) tại T. Gọi M, N là gia
điểm của tiếp tuyến d với các tiệm cận của (H).

a) Chứng minh T là trung điểm của MN.

b) Chứng minh tam giác OMN có diện tích không phụ thuộc vào tiế
tuyến d (O là gốc tọa độ).

Giải

a) d là tiếp tuyến $\Rightarrow a^2A^2 - b^2B^2 = C^2 > 0 \Rightarrow aA \pm bB \neq 0$.

Phương trình tiếp tuyến tại $T(x_T, y_T)$ là

$$\frac{x_T x}{a^2} - \frac{y_T y}{b^2} - 1 = 0 \equiv Ax + By + C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_T}{a^2A} = -\frac{y_T}{b^2B} = -\frac{1}{C} \Rightarrow x_T = -\frac{a^2A}{C}, y_T = \frac{b^2B}{C}$$

d cắt hai đường tiệm cận $y = \pm\frac{b}{a}x$ tại các điểm có hoành độ là nghiệm của $Ax \pm B.\frac{b}{a}x + C = 0$.

$$\Rightarrow M\left(\frac{-aC}{aA+bB}, \frac{-bC}{aA+bB}\right); N\left(\frac{-aC}{aA-bB}, \frac{bC}{aA-bB}\right)$$

$$\frac{x_M + x_N}{2} = \frac{-aC}{2(aA+bB)} + \frac{-ac}{2(aA-bB)} = \frac{-a^2AC + abBC - a^2AC - abBC}{2(a^2A^2 - b^2B^2)}$$

$$= \frac{-a^2AC}{a^2A^2 - b^2B^2} = \frac{-a^2AC}{C^2} = \frac{-a^2A}{C} = x_T$$

$$\frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-bC}{2(aA+bB)} + \frac{bC}{2(aA-bB)} = \frac{b^2BC}{a^2A^2 - b^2B^2} = \frac{b^2B}{C} = y_T.$$

Vậy T là trung điểm của MN.

b) Ta có $MN^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = \frac{4a^2b^2(A^2 + B^2)}{C^2}$

Tam giác OMB có chiều cao OH là khoảng cách từ O đến d (vì MN nằn trên d). Vậy : $OH = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Từ đó $S_{OMN} = \frac{1}{2}OH.MN = \frac{1}{2}\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\frac{2ab\sqrt{A^2+B^2}}{|C|}$

$\Rightarrow S_{OMN} = ab$ không phụ thuộc vào tiếp tuyến d.

Bài 8

a) Viết phương trình hypebol (H) có các trục trùng với các trục tọa độ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1 : 5x - 6y + 8 = 0$ và $d_2 : 5x + 8y + 6 = 0$.

b) Chứng minh rằng qua điểm $A(1; \sqrt{2})$ có thể kẻ được hai tiếp tuyến với (H) vuông góc với nhau. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng nối hai tiếp điểm.

Giải

a) Vì các trục của hypebol trùng với các trục tọa độ nên phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hoặc $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

- (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

  Do tiếp xúc với d_1 và $d_2 \Rightarrow \begin{cases} 25a^2 - 36b^2 = 64 \\ 25a^2 - 64b^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$

  (H) : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

- (H) : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 36b^2 - 25a^2 = 64 \\ 64b^2 - 25a^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow 28b^2 = -28$ vô nghiệm

Vậy chỉ có một hypebol thỏa mãn bài toán là (H) : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

b) Đường thẳng qua $A(1; \sqrt{2})$ có hệ số góc k :

$$d : y = k(x - 1) + \sqrt{2} \Leftrightarrow kx - y + \sqrt{2} - k = 0$$

d tiếp xúc với (H) $\Leftrightarrow 4k^2 - 1 = (\sqrt{2} - k)^2 \Leftrightarrow 3k^2 - 2\sqrt{2}k - 3 = 0$.

Phương trình bậc hai này có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2, $k_1.k_2 = -1$ nên qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (H) và hai tiếp tuyến đó vuông góc.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của (H) với tiếp tuyến d kẻ qua A.

Khi đó d : $\frac{x_0 x}{4} - y_0 y = 1$.

$\frac{x_0}{4} - \sqrt{2}y_0 = 1$ (vì d đi qua A) $\Rightarrow (x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng Δ: $\frac{x}{4} - \sqrt{2}y - 1 = 0$

Vậy Δ là đường thẳng nối hai tiếp điểm.

Ta có : $d(A, \Delta) = \dfrac{\left|\frac{1}{4} - \sqrt{2}.\sqrt{2} - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2}} = \frac{11}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{3}$.

Bài 9

Viết phương trình hypebol có tâm sai e = 2, hai tiêu điểm $F_1(-5; 2)$ và $F_2(3; 2)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Giải

Gọi O' là trung điểm của F_1F_2, O'(–1; 2). Dời hệ trục Oxy đến hệ trục mới O'XY theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$, ta có : $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = 2 + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow F_1F_2$ nằm trên O'X, O'Y là trung trực của F_1F_2.

Hypebol có tiêu cự $F_1F_2 = 2c = \sqrt{64 + 0} = 8 \Rightarrow c = 4$

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = 2 \Rightarrow a = \dfrac{c}{2} = 2$

$$\Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}.$$

Vậy trong hệ trục O'XY, phương trình hypebol là $\dfrac{X^2}{4} - \dfrac{Y^2}{12} = 1$, trong hệ trục Oxy phương trình của hypebol là : $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{12} = 1$.

Bài 10

Cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Tìm tập tất cả các điểm trong mặt phẳng tọa độ sao cho từ mỗi điểm đó có thể vẽ được hai tiếp tuyến với (H) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

b) M là một điểm bất kỳ trên (H), Δ_1, Δ_2 là hai đường thẳng đi qua M tương ứng song song với hai đường tiệm cận của (H). Chứng minh rằng diện tích S của hình bình hành giới hạn bởi Δ_1, Δ_2 và hai đường tiệm cận là một số không đổi.

(ĐỀ THI ĐH DƯỢC HÀ NỘI - 1997)

Giải

a) Giả sử tại $A(x_0; y_0)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (H) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau. Khi đó hai tiếp tuyến này có hệ số góc là k và $-\dfrac{1}{k}$.

Phương trình các tiếp tuyến là : $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow kx - y = kx_0 - y_0$

$$y = -\frac{1}{k}(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow x + ky = ky_0 + x_0.$$

Từ điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với (H), ta có :

$$k^2a^2 - b^2 = (kx_0 - y_0)^2$$
$$a^2 + k^2b^2 = (ky_0 + x_0)^2$$

Khai triển, cộng vế với vế, ta có :

$$(k^2 + 1)(a^2 - b^2) = (k^2 + 1)(x_0^2 + y_0^2) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2.$$

- $a > b$, quỹ tích là đường tròn tâm O. bán kính $\sqrt{a^2 - b^2}$
- $a \le b$, không có điểm nào thuộc quỹ tích (khi $a = b$) thì có duy nhất điểm O(0; 0) thỏa mãn $O^2 + O^2 = a^2 - b^2$, nhưng tại điểm này không kẻ được tiếp tuyến nào với (H).

b) Xét điểm $M(x_0; y_0) \in (H)$. Đường thẳng qua M song song với tiệm cận $bx - ay = 0$ có phương trình là $bx - ay - (bx_0 - ay_0) = 0$.

Đường thẳng này cắt đường tiệm cận $bx + ay = 0$ tại điểm N có tọa độ là

$$x_N = \frac{bx_0 - ay_0}{2b}; y_N = \frac{ay_0 - bx_0}{2a}$$

$$\Rightarrow MN^2 = \left(\frac{bx_0 - ay_0}{2b} - x_0\right)^2 + \left(\frac{ay_0 - bx_0}{2a} - y_0\right)^2$$

$$= \left(\frac{bx_0 + ay_0}{2b}\right)^2 + \left(\frac{bx_0 + ay_0}{2a}\right)^2 = \frac{(bx_0 + ay_0)^2(a^2 + b^2)}{4a^2b^2}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{|bx_0 + ay_0|\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}.$$

Khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận $bx - ay = 0$ là $d = \dfrac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Từ đó : $S = MN.\, d = \dfrac{|bx_0 + ay_0|\,|bx_0 - ay_0|}{2ab}$

$$= \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{2ab} = \frac{ab}{2}\left|\frac{b^2x_0^2 - a^2y_0^2}{a^2b^2}\right| = \frac{ab}{2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right)$$

$$= \frac{ab}{2} \text{ không đổi.}$$

Bài 11

> Cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Đường thẳng d có phương không đổi cắt (H) tại M, N. Chứng minh rằng trung điểm I của MN chạy trên một đường thẳng cố định d' đi qua tâm hypebol nên d có hệ số góc $k \neq 0$ thì d' có hệ số góc $k' = \dfrac{b^2}{a^2k}$.

Giải

Nếu d song song với trục Ox thì dễ dàng thấy rằng d' là trục Oy, là một đường thẳng cố định, đi qua tâm của (H).

Tương tự, nếu d song song với trục Oy thì d' là trục Ox.

Trường hợp còn lại, d có hệ số góc $k \neq 0$ không đổi,

$d : y = kx + m$

Hoành độ giao điểm của d và (H) là nghiệm của :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx+m)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2(k^2x^2 + 2kmx + m^2) = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2(b^2 + m^2) = 0$$

Nếu phương trình này có hai nghiệm thì x_I là trung bình cộng của hai nghiệm, do đó theo định lý Viet :

$$x_I = \frac{a^2km}{b^2 - a^2k^2} \Rightarrow m = \frac{b^2 - a^2k^2}{a^2k}x_I$$

Vì $I \in d$ nên : $y_I = kx_I + m = kx_I + \dfrac{b^2 - a^2k^2}{a^2k}x_I \Rightarrow y_I = \dfrac{b^2}{a^2k}x_I$.

Vậy I nằm trên đường thẳng cố định d' : $y = \dfrac{b^2}{a^2k}x$ có hệ số góc là $\dfrac{b^2}{a^2k}$ và đi qua tâm O của hypebol.

Bài 12

Trong mặt phẳng cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ O, có hệ số góc k, d' là đường thẳng đi qua O vuông góc với d.

a) Tìm điều kiện đối với k để d và d' đều cắt (H).

b) Tính theo k diện tích hình thoi có bốn đỉnh là giao điểm của d và d' với (H).

c) Xác định k để hình thoi đó có diện tích nhỏ nhất.

Giải

a) $d : y = kx$. Nếu $k = 0$ thì d' là trục tung, không cắt (H), do đó $k \neq 0$. Từ đó $d' : y = -\dfrac{1}{k}x$.

Phương trình hoành độ giao điểm d và (H) :

$$\frac{x^2}{4} - \frac{k^2x^2}{9} = 1 \Leftrightarrow (9 - 4k^2)x^2 = 36 \quad (*).$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d' và (H)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{9k^2} = 1 \Leftrightarrow (9k^2 - 4)x^2 = 36k^2 \quad (**)$$

d và d' đều cắt (H) $\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4k^2 > 0 \\ 9k^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} < k^2 < \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < |k| < \dfrac{3}{2}$.

b) Gọi M, N là giao điểm của d với (H), theo (*) ta có :

$$x_{M,N} = \frac{\pm 6}{\sqrt{9-4k^2}} \Rightarrow y_{M,N} = \frac{\pm 6k}{\sqrt{9-4k^2}}$$

Gọi P, Q là giao điểm của d' với (H), theo (**) ta có :

$$x_{P,Q} = \frac{\pm 6k}{\sqrt{9k^2-4}} \Rightarrow y_{P,Q} = \frac{\mp 6}{\sqrt{9k^2-4}}$$

Từ đó : $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = \dfrac{36(1+k^2)}{9-4k^2}$

$$OP^2 = x_P^2 + y_P^2 = \frac{36(1+k^2)}{9k^2-4}.$$

$$S = S_{MPNQ} = 2OM.\,OP = \frac{72(1+k^2)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}$$

Theo bất đẳng thức Côsi :

$$\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)} \le \frac{1}{2}[(9-4k^2)+(9k^2-4)] = \frac{5}{2}(k^2+1)$$

Dấu đẳng thức $\Leftrightarrow 9 - 4k^2 = 9k^2 - 4 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$

Do đó : $\min S = \dfrac{72(1+k^2)}{\dfrac{5}{2}(1+k^2)} = \dfrac{144}{5}$ khi $k = \pm 1$ hay d, d' là hai đường phân giác của các trục tọa độ.

Bài 13

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hybebol (H) : $4x^2 - 9y^2 = 36$.

a) Xác định tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm và tâm sai của hybebol.

b) Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua điểm $M\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{2}; 3\right)$ và có chung tiêu điểm với hybebol đã cho.

(ĐỀ THI TỐT NGHIỆP PTTH – 2000)

Giải

a) (H) : $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Ta có : $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{13}$. Từ đó :

Tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{13}; 0)$; $F_2(\sqrt{13}; 0)$

Đỉnh : $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$

Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

b) Vì hai tiêu điểm F_1, F_2 nằm trên trục Ox và đối xứng qua gốc tọa độ nên elip có trục lớn nằm trên Ox và có tâm là gốc tọa độ. Vậy elip có phương trình : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$

$$a^2-b^2=c^2 \Rightarrow a^2-b^2=13 \Rightarrow a^2=b^2+13;$$

elip đi qua $M\left(\frac{7\sqrt{3}}{2};3\right)$, nên $\frac{49.3}{4a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \Rightarrow 147b^2+36a^2-4a^2b^2=0$

Thay $a^2=b^2+13$ vào ta được : $4b^4-131b^2-468=0 \Rightarrow b^2=36 \Rightarrow a^2=49$

Vậy elip có phương trình là : $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$.

Bài 14

Tìm tập hợp các điểm M(x; y) trong hệ tọa độ Đềcác trực chuẩn Oxy sao cho khoảng cách từ M đến điểm F(0; 4) bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng y = 1.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC LUẬT VÀ XÂY DỰNG HÀ NỘI – 2000)

Giải

Ta có : $MF=\sqrt{x^2+(y-4)^2}$; khoảng cách từ M đến đường thẳng y = 1 là $|y-1|$. Từ đó ta có :

$$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=2|y-1| \Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=4(y-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3y^2=-12$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$$

Vậy tập hợp điểm cầm tìm là một hybebol.

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Viết phương trình hypebol biết góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0 và đi qua điểm M(6; 3).

ĐS : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$; $\frac{x^2}{33}-\frac{y^2}{99}=1$.

02. Viết phương trình hypebol biết một đỉnh trên trục thực là (–3; 0) và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $x^2+y^2-16=0$.

ĐS : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.

03. Cho hypebol (H) : $8x^2-y^2-8=0$ và đường thẳng d : $2x-y+m=0$.

a) Chứng minh d luôn cắt (H) tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh của

hypebol ($x_M < x_N$).

b) Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (H) ($x_{F_1} < x_{F_2}$) xác định m sao cho $F_2N = 2F_1M$.

ĐS : b) $m = \dfrac{-6 \pm 16\sqrt{2}}{21}$.

04. Cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Tính độ dài của phần đường tiệm cận chắn bởi hai đường chuẩn.

b) Tính tích các khoảng cách từ một tiêu điểm đến hai đường tiệm cận.

c) Chứng minh rằng chân đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm đến hai tiệm cận nằm trên đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó.

ĐS : a) 2a; b) b^2.

05. Chứng minh rằng khi d : $x\cos t - y\sin t + \sqrt{4\cos^2 t - 1} = 0$ là đường thẳng thì nó tiếp xúc với một hypebol cố định. Viết phương trình của hypebol đó.

ĐS : $\dfrac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

06. Cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

a) Một đường thẳng qua tâm (H) cắt (H) tại M, N. Chứng minh các tiếp tuyến của (H) tại M, N song song với nhau.

b) Chứng minh rằng nếu hai tiếp tuyến của (H) song song với nhau thì các tiếp điểm đối xứng qua tâm của (H).

07. Cho họ đường cong : (C_m) : $(m^2 - 4)x^2 - 4y^2 - 4(m^2 - 4) = 0$.

Tùy theo giá trị của tham số m, hãy xác định dạng đường cong (C_m).

ĐS : $m = 0$ là đường tròn;

$0 < |m| < 2$ là elip;

$|m| = 2$ là đường thẳng $y = 0$;

$|m| > 2$ là hypebol.

Chuyên đề 6 : **PARABOL**

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. CÁC DẠNG CHÍNH TẮC CỦA PARABOL

Phương trình chính tắc ($p > 0$)	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
Đồ thị				
Tiêu điểm	$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$	$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$
Đường chuẩn	$\Delta : x = -\frac{p}{2}$	$\Delta : x = \frac{p}{2}$	$\Delta : x = -\frac{p}{2}$	$\Delta : y = \frac{p}{2}$
Bán kính qua tiêu điểm ($M(x; y) \in (P)$)	$MF = x + \frac{p}{2}$	$MF = -x + \frac{p}{2}$	$MF = y + \frac{p}{2}$	$MF = -y + \frac{p}{2}$
Tính chất điểm thuộc parabol (P)	$x \in (P) \Leftrightarrow d(M, \Delta) = MF$			

2. TIẾP TUYẾN CỦA PARABOL

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại $M(x_0; y_0) \in (P)$

$$y_0y = p(x + x_0)$$

$$(y_0y = -p(x + x_0);\ x_0x = p(y + y_0);\ x_0x = -p(y + y_0))$$

Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với (P)

$$B^2p = 2AC$$

$$(B^2p = -2AC;\ A^2p = 2BC;\ A^2p = -2BC).$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA PARABOL

A. PHƯƠNG PHÁP

Đưa phương trình về dạng chính tắc, từ đó xác định các yếu tố.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Xác định tham số p, tọa độ đỉnh, tiêu điểm và phương trình đường chuẩn parabol : $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

Giải

$x^2 - 2x + 8y + 17 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -8(y + 2)$. Đặt $O'(1; -2)$.

Thực hiện phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OO'}$ đưa hệ trục Oxy thành hệ trục O'XY.

Công thức đổi trục $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 2 \end{cases}$. Trong hệ trục O'XY, phương trình của parabol là : $X^2 = -8Y$.

Vậy đỉnh của parabol là O', tọa độ trong Oxy là $O'(1; -2)$.

Tiêu điểm F : $\begin{cases} X = 0 \\ Y = -\dfrac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow F(1; -4)$

Đường chuẩn Δ : $Y = \dfrac{p}{2} \Rightarrow y - 2 = 0$.

Trong hệ tọa độ Oxy; $\Delta : y = 0$.

Vấn đề 2 : LẬP PHƯƠNG TRÌNH PARABOL

A. PHƯƠNG PHÁP

Để lập phương trình chính tắc ta cần tìm tham số p. Nếu trục đối xứng của parabol song song với một trục tọa độ thì dùng phép tịnh tiến đưa nó về dạng chính tắc. Cũng có thể sử dụng định nghĩa parabol để lập phương trình của nó.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 2

Lập phương trình parabol có trục đối xứng là Ox, đỉnh là gốc O và đi qua điểm M(−2; 4).

Giải

Phương trình parabol có dạng $y^2 = -2px$. Vì parabol đi qua điểm (−2; 4) nên $4^2 = (-2p)(-2) \Rightarrow p = 4$.

Vậy phương trình parabol là : $y^2 = -8x$

Vấn đề 3 : TÌM ĐIỂM TRÊN PARABOL

A. PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm; đưa bài toán về việc tìm giao điểm của parabol với một đường khác.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 3

Tìm trên parabol $y^2 = 8x$ điểm M biết bán kính qua tiêu điểm của nó là bằng 8.

Giải

$y^2 = 8x \Rightarrow y = 2px$ với $p = 4$.

$MF = x + \frac{p}{2} \Rightarrow 8 = x_M + 2 \Rightarrow x_M = 6$.

Từ đó ${y_M}^2 = 48 \Rightarrow y_M = \pm 4\sqrt{3}$. Vậy có hai điểm thỏa mãn bài toán là $M_1(6;\ 4\sqrt{3})$, $M_2(6;\ -4\sqrt{3})$.

Vấn đề 4 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA PARABOL

A. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng công thức tìm tiếp tuyến tại một điểm nằm trên parabol; sử dụng điều kiện để một đường thẳng tiếp xúc với parabol.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 4

Tìm tiếp tuyến chung của parabol (P) : $y^2 = 12x$ và elip (E) : $6x^2 + 8y^2 = 48$.

Giải

Ta tìm phương trình tiếp tuyến chung dạng d : $Ax + By + C = 0$

Vì d tiếp xúc với (P) $\Rightarrow B^2.6 = 2AC$.

Vì d tiếp xúc với (E) $\Rightarrow 8A^2 + 6B^2 = C^2$.

Vì $C \neq 0$ nên chọn $C = 1$, ta có :

$$\begin{cases} A = 3B^2 \\ 8A^2 + 6B^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3B^2 \\ 8A^2 + 2A - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = +\sqrt{\frac{1}{12}} \end{cases}.$$

Vậy có hai tiếp tuyến chung là :

$$\frac{1}{4}x \pm \frac{1}{\sqrt{12}}y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow 3x \pm 2\sqrt{3}y + 12 = 0.$$

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

Cho parabol $y^2 = 4x$. Một đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm (của parabol), cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ A và B đến trục parabol là một số không đổi.

(ĐỀ THI ĐH KINH TẾ QUỐC DÂN HÀ NỘI - 1999)

Giải

Tiêu điểm của parabol (P) là F(1; 0), trục của parabol là Ox. Khoảng cách từ một điểm đến trục của (P) chính là giá trị tuyệt đối của tung độ.

Đường thẳng x = 1 qua F, cắt (P) tại A(1; 2), B(1; –2)

Do đó tính khoảng cách từ A và B đến trục là : $|2| + |-2| = 4$.

. Đường thẳng d khác $x - 1 = 0$ qua E cắt (P) tại hai điểm phân biệt phải có hệ số góc $k \neq 0$. Do đó; $d : y = k(x - 1), k \neq 0$.

Tọa độ giao điểm A và B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$

Do đó tung độ A và B là nghiệm của phương trình $ky^2 - 4y - 4k = 0; k \neq 0$.

Theo định lý Viét : $y_A.y_B = -4 \Rightarrow |y_A|.|y_B| = 4$.

Vậy trong mọi trường hợp, ta đều có tích các khoảng cách từ A và B đến trục của parabol bằng 4 không đổi.

Bài 2

Trong mặt phẳng cho parabol (P) : $y^2 = x$.

Gọi (C) là đường tròn tâm C(2; 0), bán kính R.

a) Xác định R để đường tròn (C) tiếp xúc với parabol (P). Xác định tọa độ tiếp điểm T và T'.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung tại T và T'.

Giải

a) Tọa độ giao điểm của (C) và (P) là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = R^2 \\ y^2 = x \end{cases}$

Vì vậy hoành độ giao điểm của chúng là nghiệm của phương trình :

$$(x-2)^2 + x = R^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 - R^2 = 0$$

(C) và (P) tiếp xúc với nhau khi phương trình này có nghiệm kép tức là :

$$\Delta = 9 - 4(4 - R^2) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Khi đó hoành độ tiếp điểm là $x = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$,

tung độ tiếp điểm là $y = \pm\sqrt{x} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $T\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $T'\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

b) Tham số của parabol là $p = \frac{1}{2}$, do đó :

- Tiếp tuyến tại $T\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$: $\frac{\sqrt{6}}{2}y = \frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{6}y + 3 = 0.$

- Tiếp tuyến tại $T'\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$: $-\frac{\sqrt{6}}{2}y = \frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{6}y + 3 = 0.$

Bài 3

Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$ và đường thẳng d : $2mx - 2y - mp = 0$. Gọi M', M'' là các giao điểm của (P) và d.

Chứng tỏ rằng đường tròn đường kính M'M'' tiếp xúc với đường chuẩn của parabol (P). Viết phương trình đường tròn đó.

Giải

Giả sử M'(x'; y'), M''(x''; y''). Khi đó (x'; y'), (x''; y'') là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y^2 - 2px = 0 \\ 2mx - 2y - mp = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p} \\ y = \dfrac{2mx - mp}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2mx - mp}{2}\right)^2 - 2px = 0 \\ 2m.\dfrac{y^2}{2p} - 2y - mp = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2x^2 - (m^2+2)px + \dfrac{m^2p^2}{4} = 0 & (1) \\ y^2 - \dfrac{2p}{m}y - p^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Chú ý : *Khi $m = 0 \Rightarrow d : y = 0$ tiếp xúc với (P) tại đỉnh $\Rightarrow M' \equiv M''$.*

Vì (2) có $\Delta' = \frac{p^2}{m^2} + p^2 > 0$ nên luôn có hai nghiệm, d cắt (P) tại hai điểm. Gọi I là trung điểm của M'M'', từ (1), (2) và định lý Viét :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x' + x''}{2} = \dfrac{(m^2+2)p}{2m^2} \\ y_I = \dfrac{y' + y''}{2} = \dfrac{p}{m} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{(m^2+2)p}{2m^2}; \frac{p}{m}\right).$$

Cũng theo định lý Viét :

$$M'M''^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = (x' + x'')^2 - 4x'x'' + (y' + y'')^2 - 4y'y''$$

$$= \frac{p^2(m^2+2)^2}{m^4} - p^2 + \left(\frac{2p}{m}\right)^2 + 4p^2$$

$$= \frac{4p^2}{m^4}(m^4 + 2m^2 + 1) = \frac{4p^2}{m^4}(m^2+1)^2$$

Suy ra $M'M'' = 2p\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$.

Đường chuẩn là $\Delta : x = -\frac{p}{2}$. Do đó :

$$d(I, \Delta) = \left|\frac{(m^2+2)p}{2m^2} + \frac{p}{2}\right| = p\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{2}M'M''.$$

Vậy đường tròn đường kính $M'M''$ tiếp xúc với đường chuẩn.

Phương trình đường tròn này là :

$$\left[x - \frac{p(m^2+2)}{2m}\right]^2 + \left(y - \frac{p}{m}\right)^2 = p^2\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)^2.$$

Chú ý : *Có thể chứng minh đường tròn đường kính M'M'' tiếp xúc với đường chuẩn theo cách khác như sau :*

Ký hiệu $\Delta : x = -\frac{p}{2}$ *là đường chuẩn,* $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ *là tiêu điểm vì*

$$2m.\frac{p}{2} - 2.0 - mp = 0 \Rightarrow F \in d$$

Từ đó theo điều kiện điểm thuộc parabol, ta có :

$M'F = d(M', \Delta)$, $\quad M''F = d(M', \Delta)$.

Gọi I là trung điểm của M'M'' thì :

$$d(I, \Delta) = \frac{d(M', \Delta) + d(M'', \Delta)}{2} = \frac{M'F + M''F}{2} = \frac{M'M''}{2}.$$

Vậy đường tròn tâm I, bán kính $\frac{M'M''}{2}$ *tiếp xúc với Δ, nói cách khác, đường tròn đường kính M'M'' tiếp xúc với Δ.*

Bài 4

Trong mặt phẳng cho parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$

và đường thẳng d : $2mx - 2y + 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng với mọi m, d luôn đi qua tiêu điểm F của parabol (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi m thay đổi.

b) Tính góc tạo bởi các tiếp tuyến của (P) tại M và N.

Giải

a) Vì tiêu điểm $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$ có $2m.0 - 2.\frac{1}{2} + 1 = 0$ nên d luôn đi qua F.

Vì d : $y = mx + \frac{1}{2}$ nên hoành độ giao điểm là nghiệm của $\frac{1}{2}x^2 = mx + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0$.

Vì $\Delta' = m^2 + 1 > 0$ nên phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ d cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Theo định lý Viét : $x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = m$.

Vì $I \in d$ nên $y_I = m.x_I + \dfrac{1}{2} \Rightarrow y_I = {x_I}^2 + \dfrac{1}{2}$.

Vậy quỹ tích của I là parabol : $y = x^2 + \dfrac{1}{2}$.

b) Theo công thức, tiếp tuyến với (P) tại M, N là :

$$x_M x = y_M + y \Leftrightarrow y = x_M x - y_M.$$

$$x_N x = y_N + y \Leftrightarrow y = x_N x - y_N.$$

Theo định lý Viét $x_M.x_N = -1$, do đó tiếp tuyến tại M và N vuông góc với nhau, nói cách khác góc giữa chúng bằng 90^0.

Bài 5

M là một điểm thuộc parabol (P) : $y^2 = 64x$, N là một điểm thuộc đường thẳng $\Delta: 4x + 3y + 46 = 0$. a) Xác định M, N để đoạn MN ngắn nhất. b) Với kết quả tìm được ở a) chứng tỏ rằng khi đó đường thẳng MN vuông góc với tiếp tuyến tại M của parabol.

Giải

a) Giả sử $M(x_0; y_0) \in (P)$. Ta có : $M\left(\dfrac{{y_0}^2}{64}; y_0\right)$

$$d(M, \Delta) = \frac{\left|4\dfrac{{y_0}^2}{64} + 3y_0 + 46\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{{y_0}^2}{80} + \frac{3}{5}y_0 + \frac{46}{5}$$

$$= \frac{1}{80}(y_0^2 + 48y_0 + 736) = \frac{1}{80}[(y_0 + 24)^2 + 160] \geq 2.$$

$$\min d(M, \Delta) = 2 \Leftrightarrow y_0 + 24 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -24,\ x_0 = \frac{y_0^2}{64} = 9.$$

Vậy M(9; –24).

Để tìm $N \in \Delta$, ta lập phương trình đường thẳng qua M vuông góc với

$$\Delta : \frac{x-9}{4} = \frac{y+24}{3} \Leftrightarrow 3x - 4y - 123 = 0$$

$$N : \begin{cases} 3x - 4y - 123 = 0 \\ 4x + 3y + 46 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{37}{5} \\ y = -\dfrac{126}{5} \end{cases}. \quad \text{Vậy } N\left(\frac{37}{5}; -\frac{126}{5}\right).$$

b) Tiếp tuyến với (P) tại M(9; –24) là : $-24y = 32(x + 9) \Leftrightarrow 4x + 3y - 12 = 0$.

Đường thẳng MN : $3x - 4y - 123 = 0$.

Vì $4.3 + 3(-4) = 0$ nên MN vuông góc với tiếp tuyến với parabol tại M.

Bài 6

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) : $y^2 = 4x$ và hai đường thẳng d : $m^2x + my + 1 = 0$, $\Delta : x - my + m^2 = 0$, m là tham số khác 0.

a) Chứng minh rằng $d \perp \Delta$ và giao điểm M của d và Δ di động trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

b) Chứng minh d và Δ luôn tiếp xúc với (P). Gọi A và B lần lượt là tiếp điểm của d và Δ với (P). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

Giải

a) Vì $m^2.1 + m(-m) = 0$ nên $d \perp \Delta$.

Tọa độ giao điểm d và Δ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} m^2x + my + 1 = 0 \\ x - my + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = m - \dfrac{1}{m} \end{cases}.$$

Vậy $M\left(-1; m - \dfrac{1}{m}\right)$ và M luôn thuộc đường thẳng cố định $x = -1$ với mọi $m \neq 0$.

b) Ta viết (P) : $x = \dfrac{y^2}{4}$; d : $x = -\dfrac{my + 1}{m^2}$; $\Delta : x = my - m$.

Khi đó tung độ giao điểm (P) và d là nghiệm của phương trình :

$$\frac{y^2}{4} = -\frac{my + 1}{m^2} \Leftrightarrow my^2 + 4my + 4 = 0 \Leftrightarrow (my + 2)^2 = 0.$$

Vì phương trình này có nghiệm kép $y = -\dfrac{2}{m}$ nên (P) tiếp xúc với d và tiếp điểm là $A\left(\dfrac{1}{m^2}; -\dfrac{2}{m}\right)$.

Tung độ giao điểm (P) và Δ là nghiệm của phương trình :

$$\frac{y^2}{4} = my - m^2 \Leftrightarrow y^2 - 4my + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2m)^2 = 0.$$

Vì phương trình này có nghiệm kép $y = 2m$ nên (P) tiếp xúc với Δ và tiếp điểm là $B(m^2; 2m)$.

Ta có : $\overrightarrow{AB} = \left(m^2 - \dfrac{1}{m^2}; 2m + \dfrac{2}{m}\right) = \dfrac{m^2 + 1}{m^2}(m^2 - 1; 2m)$

$\Rightarrow$ AB có vetơ chỉ phương là $(m^2 - 1; 2m)$ hay vectơ pháp tuyến là $(2m; 1 - m^2)$.

Vì vậy $AB: 2m(x - m^2) + (1 - m^2)(y - 2m) = 0$

$$\Leftrightarrow 2mx + (1 - m^2)y - 2m = 0$$

Ta viết phương trình AB dạng : $-m^2y + 2(x - 1)m + y = 0$

Đẳng thức này đúng với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định I(1; 0).

Bài 7

Trong mặt phẳng Oxy cho parabol $y = x^2 - 2x$ và elip $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

a) Chứng minh rằng parabol cắt elip tại bốn điểm phân biệt.

b) Chứng minh bốn giao điểm nói trên nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

(ĐỀ THI ĐH NGOẠI THƯƠNG CƠ SỞ TP HCM - 1999)

Giải

a) Đỉnh của parabol là (1; 1) nằm ngoài elip (do $\frac{1^2}{9} + 1^2 > 1$), parabol cắt trục hoành tại các điểm (0; 0) và (1; 0) nằm trong elip, do vậy parabol cắt elip tại bốn điểm phân biệt. Có thể giải theo phương pháp giải tích như sau :

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ : $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$

Do đó hoành độ của giao điểm là nghiệm của phương trình :

$$\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0.$$

Ta sẽ chỉ ra phương trình này có bốn nghiệm phân biệt và như vậy parabol cắt elip tại bốn điểm phân biệt.

Thật vậy vì f(x) liên tục trên R và $f(-1) = 73$; $f(0) = -9$; $f(1) = 1$; $f(2) = -5$; $f(3) = 81$ nên phương trình $f(x) = 0$ có bốn nghiệm nằm trong các khoảng (-1; 0), (0; 1), (1; 2), (2; 3).

b) Trở lại xét hệ phương trình xác định tọa độ của các giao điểm, ta có :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{9}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{8}{9}y = 0 \\ \frac{1}{9}x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{16}{9}x - \frac{8}{9}y = 1 \Rightarrow \left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(x - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{161}{81}.$$

Vậy các giao điểm của parabol và elip nằm trên đường tròn tâm $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9}\right)$ và bán kính $\frac{\sqrt{161}}{9}$.

Bài 8

Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm A(3; 0) và parabol : $y = x^2$.

a) M là một điểm thuộc parabol có hoành độ $x_M = a$. Tính độ dài AM theo a. Xác định a để AM ngắn nhất

b) Chứng minh rằng AM ngắn nhất thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của parabol.

Giải

a) Ta có : $M(a; a^2)$, do đó $AM = \sqrt{(a-3)^2 + a^4} = \sqrt{a^4 + a^2 - 6a + 9}$.

Ta có : $AM^2 = a^4 - 2a^2 + 1 + 3a^2 - 6a + 3 + 5 = (a^2 - 1)^2 + 3(a - 1)^2 + 5$

$\min AM^2 = 5 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy AM ngắn nhất khi a = 1, M(1; 1).

Chú ý : *Có thể giải bằng phương pháp tìm cực trị của hàm số.*

b) Tiếp tuyến với (P) tại M(1; 1) có phương trình là

$$d : 1.x = \frac{1}{2}(y + 1) \Leftrightarrow 2x - y = 0,$$

có vetơ chỉ phương $\vec{a}(1; 2)$, $\overrightarrow{AM} = (-2; 1)$.

Vì $\vec{a}.\overrightarrow{AM} = 0$ nên $\vec{a} \perp \overrightarrow{AM}$.

Vậy $d \perp AM$.

Bài 9

Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm A(0; 1) và đường thẳng $\Delta : y = -1$.

a) Tìm quỹ tích những điểm cách đều A và Δ.

b) Viết phương trình đường tròn đi qua A tiếp xúc với đường thẳng Δ và đường thẳng x = 9.

(ĐỀ THI ĐH KHỐI A - 1982)

Giải

a) Gọi M(x; y) là một điểm cách đều A và Δ.

Vì $MA = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$; $d(M, \Delta) = |y + 1|$.

Vậy M cách đều A và Δ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = |y + 1|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4y$.

Vậy quỹ tích là parabol : $x^2 = 4y$.

b) Tâm của đường tròn phải cách đều A, Δ và đường thẳng $x = 9$, do đó tâm đường tròn phải nằm trên parabol $x^2 = 4y$ và cách đều hai đường thẳng Δ và $x - 9 = 0$.

Giả sử tọa độ của tâm I là $I(x_0; y_0)$.

Khi đó ta có $I\left(x_0; \frac{x_0^2}{4}\right)$ (vì $x_0^2 = 4y_0$).

Khoảng cách từ I đến Δ : $\left|\frac{x_0^2}{4} + 1\right|$.

Khoảng cách từ I đến $x - 9 = 0$: $|x_0 - 9|$.

Từ đó $\frac{x_0^2}{4} + 1 = \pm(x_0 - 9)$.

- $\frac{x_0^2}{4} + 1 = x_0 - 9 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 40 = 0$ vô nghiệm.
- $\frac{x_0^2}{4} + 1 = -x + 9 \Leftrightarrow x_0^2 + 4x_0 - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 4 \\ x_0 = -8 \end{array}\right.$

$x_0 = 4 \Rightarrow I(4; 4)$, $R = d(I, \Delta) = 5$, ta được đường tròn thỏa mãn bài toán là : $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

$x_0 = -8 \Rightarrow I(-8; 16)$, $R = d(I, \Delta) = 17$, ta được đường tròn thứ hai thỏa mãn bài toán là $(x + 8)^2 + (y - 16)^2 = 289$.

Bài 10

Cho parabol $y^2 = 4x$.

a) Chứng minh rằng từ điểm N tùy ý thuộc đường chuẩn của parabol có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến parabol mà hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

b) Gọi T_1 và T_2 là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến nói ở a), chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định khi N chạy trên đường chuẩn của parabol.

c) Cho M là một điểm thuộc parabol (khác đỉnh parabol) Tiếp tuyến tại M của parabol cắt các trục Ox, Oy lần lượt A và B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB khi M chạy trên parabol.

(ĐỀ THI ĐH NGOẠI NGỮ HÀ NỘI - 1998)

Giải

a) Phương trình đường chuẩn của parabol $\Delta : x = -1$.

Điểm N tùy ý trên Δ có dạng $N(-1; a)$. Phương trình tiếp tuyến với parabol qua N có dạng hệ số góc k là d : $y = k(x + 1) + a$.

Tọa độ giao điểm của d và parabol là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = kx + k + a \\ y^2 = 4x \end{cases}$.

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$$(kx + k + a)^2 = 4x \Leftrightarrow k^2x^2 + 2(k^2 + ka - 2)x + k^2 + a^2 + 2ka = 0.$$

d tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình này có nghiệm kép, tức là $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta' = (k^2 + ka - 2)^2 - k^2(k^2 + a + 2ka) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k^2 + ak + 1 = 0.$

Với mọi a phương trình cuối cùng có hai nghiệm k_1, k_2 thỏa mãn $k_1.k_2 = -1$.

Vậy qua điểm N bất kỳ trên Δ luôn kẻ được hai tiếp tuyến với parabol và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

b) Giả sử $T_1(x_1; y_1)$, $T_2(x_2; y_2)$. Khi đó các tiếp tuyến

$$NT_1 : yy_1 = 2(x + x_1); \quad NT_2 : yy_2 = 2(x + x_2)$$

Cả hai đường này đều qua N(−1; a) nên

$$ay_1 = 2(-1 + x_1); \quad ay_2 = 2(-1 + x_2).$$

Suy ra phương trình đường thẳng T_1T_2 là $ay = 2(-1 + x) \Leftrightarrow 2x - ay - 2 = 0$.

Với mọi a, dễ dàng thấy rằng đường thẳng này luôn đi qua điểm cố định (1; 0).

c) Giả sử $M(x_0; y_0)$ là một điểm bất kỳ thuộc parabol, $y_0 \neq 0$. Phương trình tiếp tuyến với parabol tại M là $yy_0 = 2(x + x_0)$.

Đường thẳng này cắt trục Ox tại $A(-x_0; 0)$, cắt trục Oy tại $B\left(0; \frac{2x_0}{y_0}\right)$. Do đó trung điểm I của AB có tọa độ là :

$$I : \begin{cases} x = -\frac{x_0}{2} \\ y = \frac{x_0}{y_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{x_0}{2} \\ y^2 = \frac{x_0^2}{y^2} = \frac{x_0^2}{4x_0} \end{cases} \text{(vì } y_0^2 = 4x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{x_0}{2} \\ y^2 = \frac{x_0}{4} \end{cases} \Rightarrow y^2 = -\frac{x}{2}.$$

Vậy quỹ tích của I là parabol $y^2 = -\frac{x}{2}$ từ điểm đỉnh.

Bài 11

Trong mặt phẳng tọa độ cho parabol (P) : $y^2 = 2px$. Hai điểm M, N thay đổi trên (P) sao cho tam giác OMN vuông tại O. Chứng minh MN đi qua một điểm cố định.

Giải

Do Ox là trục đối xứng của (P) nên điểm cố định (nếu có) phải nằm trên Ox. Xét từng trường hợp tam giác OMN vuông cân, khi đó OM : y = x, ON : y = −x.

Ta có : $M : \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = 2p$

$N: \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x = -y = 2p \Rightarrow$ MN đi qua điểm A(2p; 0).

Bây giờ giả sử M, N ở vị trí tùy ý. Giả sử OM : $y = kx$ thì ON : $y = -\frac{1}{k}x$ (vì M $\neq$ 0 nên $k \neq 0$).

$$M: \begin{cases} y = kx \\ y^2 = 2px \end{cases}, x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2p}{k^2} \\ y = \frac{2p}{k} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2p}{k^2}; \frac{2p}{k}\right)$$

$$N: \begin{cases} y = -\frac{1}{k}x \\ y^2 = 2px \end{cases}, x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2pk^2 \\ y = -2pk \end{cases} \Rightarrow N(2pk^2; -2pk)$$

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2p}{k^2} - 2p; \frac{2p}{k}\right) = \frac{2p}{k^2}(1 - k^2; k)$$

$$\overrightarrow{AN} = (2pk^2 - 2p; -2pk) = -2p(1 - k^2; k)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AN} \Rightarrow$ A, M, N thẳng hàng. Vậy MN luôn đi qua điểm cố định A(2p; 0).

Bài 12

Cho họ đường thẳng $d_\alpha : x\cos\alpha - y + \sin^2\alpha = 0$.

a) Chứng tỏ rằng với mọi α, d_α luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

b) Tìm quỹ tích của tiếp điểm.

Giải

a) Thay $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, ta có : $d_\alpha : x\cos\alpha - y + 1 - \cos^2\alpha = 0$

$$d_\alpha : y = -\left(\frac{x}{2} - \cos\alpha\right)^2 + \frac{x^2}{4} + 1.$$

Xét parabol (P) : $y = \frac{x^2}{4} + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_α và (P) là $-\left(\frac{x}{2} - \cos\alpha\right)^2 = 0$ luôn có nghiệm kép $x = 2\cos\alpha$ nên d_α luôn tiếp xúc với (P) là một parabol cố định.

b) Tọa độ tiếp điểm là : $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = \frac{x^2}{4} + 1 \end{cases}$.

Do đó quỹ tích của tiếp điểm là $y = \frac{x^2}{4} + 1$, $-2 \le x \le 2$.

Bài 13

Cho parabol $y^2 = 8x$ và điểm I(2; 4) nằm trên parabol. Xét góc vuông thay đổi quay quanh điểm I và hai cạnh của góc vuông cắt parabol tại hai điểm M và N (khác điểm I). Chứng minh rằng đường MN luôn đi qua một điểm cố định.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG - 2000)

Giải

Giả sử $M\left(\frac{m^2}{8}; m\right)$, $N\left(\frac{n^2}{8}; n\right)$, m, n ≠ 4. Khi đó :

$$\overrightarrow{IM} = \left(\frac{m^2 - 16}{8}; m - 4\right); \ \overrightarrow{IN} = \left(\frac{n^2 - 16}{8}; n - 4\right)$$

Do $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{IN}$ và $(m - 4)(n - 4) \neq 0$ nên :

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} = \frac{m^2 - 16}{8}.\frac{n^2 - 16}{8} + (m - 4)(n - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m + 4}{8}.\frac{n + 4}{8} + 1 = 0 \Leftrightarrow mn + 4(m + n) + 80 = 0$$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm M, N là :

$$\frac{y - n}{x - \frac{n^2}{8}} = \frac{m - n}{\frac{m^2}{8} - \frac{n^2}{8}} \Leftrightarrow \frac{y - n}{8x - n^2} = \frac{1}{m + n} \Leftrightarrow 8x - (m + n)y + mn = 0$$

Giả sử $(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc MN, khi đó với mọi m, n ta có :

$$\begin{cases} mn + 4(m + n) + 80 = 0 \\ 8x_0 - (m + n)y_0 + mn = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-(80 - 4n)}{n + 4} \\ 8x_0 - (m + n)y_0 + mn = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8x_0 + \left(\frac{80 + 4n}{n + 4} - n\right)y_0 - \frac{(80 + 4n)n}{n + 4} = 0 \ \forall n$$

$$\Rightarrow 8(n + 4)x_0 + (80 - n^2)y_0 - (80n + 4n^2) = 0 \ \forall n$$

$$\Leftrightarrow (-y_0 - 4)n^2 + 8(x_0 - 10)n + (32x_0 + 80y_0) = 0 \ \forall n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y_0 - 4 = 0 \\ x_0 - 10 = 0 \\ 32x_0 + 80y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 10 \\ y_0 = -4 \end{cases}$$

Vậy MN luôn đi qua một điểm cố định là (10; –4).

Bài 14

Cho prabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx + 1$. Chứng minh rằng khi m thay đổi đường thẳng luôn luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB khi m thay đổi (O là gốc tọa độ).

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG CƠ SỞ 2 - 2000)

Giải

Hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng là nghiệm của phương trình $x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$.

Vì $\Delta = m^2 + 1 > 0; \forall m$ nên đường thẳng luôn cắt Parabol tại hai điểm phân biệt A và B, có tích các hoành độ bằng –1.

Gọi $A(a; a^2)$, $B(b; b^2)$. Do A và B thuộc đường thẳng nên :

$$\begin{cases} a^2 = ma + 1 \\ b^2 = mb + 1 \\ ab = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b^2 = m(a - b) \\ a^2 + b^2 = m(a + b) + 2 \\ ab = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = m \\ a^2 + b^2 = m^2 + 2 \\ ab = -1 \end{cases}$$

Phương trình OA : $y = ax \Rightarrow$ phương trình trung trực của OA là :

$$y = -\frac{1}{a}x + \frac{a^2 + 1}{2}.$$

Phương trình OB : $y = bx \Rightarrow$ phương trình trung trực của OB là :

$$y = -\frac{1}{b}x + \frac{b^2 + 1}{2}.$$

Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{a}x + \frac{a^2 + 1}{2} \\ y = -\frac{1}{b}x + \frac{b^2 + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-ab(a + b)}{2} \\ y = \frac{a^2 + b^2 + ab + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m}{2} \\ y = \frac{m^2 + 2}{2} \end{cases} \Rightarrow y = 2x^2 + 1$$

Vậy tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB là parabol : $y = 2x^2 + 1$.

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Lập phương trình của parabol có đỉnh là gốc O và chắn trên đường thẳng $y = x$ một đoạn dài $4\sqrt{2}$.

ĐS : $y^2 = \pm 4x$, $x^2 = \pm 4y$.

02. Viết phương trình parabol biết tiêu điểm F(3; –1) và đường chuẩn $\Delta : x - 2y + 1 = 0$.

ĐS : $4x^2 + y^2 + 4xy - 32x + 14y + 49 = 0$.

03. Cho parabol (P) : $y = \frac{x^2}{2}$ và điểm $A\left(\frac{15}{8}; \frac{27}{8}\right)$.

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_1\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và vuông góc với hai tiếp tuyến của (P) tại M_1.

b) Tìm tất cả các điểm M trên (P) sao cho AM vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M.

(ĐỀ THI ĐHQG TP. HCM – KHỐI A – 1997)

ĐS : a) $x + \frac{3}{2}$; b) $\left(-1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; \frac{25}{8}\right), \left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$.

04. Cho parabol $y^2 = 2px$. Gọi FK là khoảng cách từ tiêu điểm F đến tiếp tuyến Mt của parabol tại M. Chứng minh rằng $FK^2 = \frac{p}{2}FM$.

05. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$. Gọi M_1, M_2 là hai điểm của (P) có hoành độ x_1, x_2.

a) Lập phương trình đường thẳng M_1M_2. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để M_1M_2 đi qua tiêu điểm F của parabol là $y_1y_2 = -p^2$.

b) Trong trường hợp M_1M_2 đi qua F, chứng minh tiếp tuyến tại M_1 và M_2 vuông góc với nhau.

ĐS : a) $2p\left(x - \frac{{y_1}^2}{2p}\right) - (y_2 + y_1)(y - y_1) = 0$.

06. Cho parabol (P) : $y^2 = 4x$. Đường thẳng d đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại M, N. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.

ĐS : $y^2 = 2(x - 1)$.

07. Trong mặt phẳng cho parabol (P) : $y^2 = 2px$, $p > 0$, có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Tiếp tuyến d của (P) tại M cắt Oy, Ox lần lượt tại I, N; d cắt Δ tại K.

a) Chứng minh I là trung điểm của MN, FI ⊥ d và điểm đối xứng của F qua I nằm trên Δ.

b) Đường thẳng qua F vuông góc với Ox cắt D tại L. Chứng minh FK = FL.

08. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm F(1; 0) và một điểm thay đổi M(–1; m), m ∈ R.

a) Với mỗi giá trị của m hãy viết phương trình đường trung trực Δ của MF.

b) Tìm những điểm trên mặt phẳng không thuộc đường thẳng Δ nào.

c) Chứng minh đường Δ luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

ĐS : a) $4x - 2my + m^2 = 0$; b) $\{(x; y) \mid y^2 < 4x\}$; c) $y^2 = 4x$.

09. Trong mặt phẳng cho parabol (P) : $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Điểm M chạy trên (P) (khác đỉnh của parabol). Gọi N, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên Ox, Oy. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng qua K, vuông góc với OM đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng qua K vuông góc với NK đi qua một điểm cố định.

c) Đường thẳng NK luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

ĐS : a) (2p; 0); b) (2p; 0); c) $y^2 = -8x$.

10. Trong mặt phẳng cho parabol (P) : $y^2 = 2px$, $p > 0$. Một đường thẳng di động d cắt (P) tại M và N, cắt Ox tại I. Chứng minh rằng :

a) ${x_I}^2 = x_M.x_N$

b) Nếu ΔOMN vuông tại O thì $x_Mx_N = 4p^2$ và d đi qua một điểm cố định.

ĐS : b) (2p; 0).

Chuyên đề 7 : VECTƠ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM

M(x; y; z) đối với hệ tọa độ $\left\{0; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}\right\}$

M(x; y; z) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.

2. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

- $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_2\vec{e_3}$.
- Với A $(x_A; y_A; z_A)$ và B$(x_B; y_B; z_B)$ thì :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

3. CÁC PHÉP TOÁN VỀ VECTƠ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, k ∈ R, khi đó :

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.

- $\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

Nếu $\vec{a} = k.\vec{b}$: hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là cùng phương, ký hiệu $\vec{a} // \vec{b}$.

❒ **Chú ý** : *Vectơ $\vec{0}$ được coi là cùng phương với mọi vectơ.*

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$.

4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}.\vec{b})$

  Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

  $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

5. ĐIỂM M CHIA ĐOẠN THẲNG AB THEO TỶ SỐ k ≠ 1

- $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \forall O, \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

Tọa độ của M : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$.

- M là trung điểm của đoạn AB $\Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$

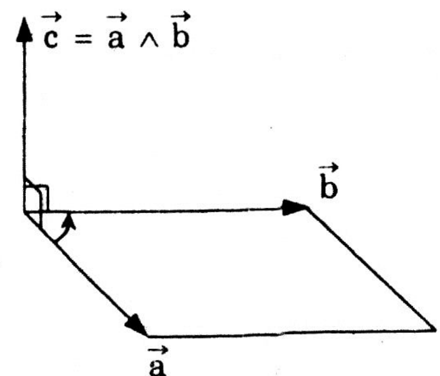
$(x_M; y_M; z_M) = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

6. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{c}$ có tính chất :

- $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$, kí hiệu $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.



- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

  $\vec{c}$ theo hướng tạo nên tam diện thuận $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (xem hình vẽ).

- $|\vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

  = diện tích hình bình hành có cạnh là $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$.

- Cho tam giác ABC : $S_{\Delta ABC} = \left|\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right|$.
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{m} = 0$.
- Cho hình hộp ABCD A'B'C'D' : $V_{ABCDA'B'C'D'} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AA'}$.

7. MỘT SỐ HỆ THỨC THƯỜNG GẶP

- Với ba điểm O, A, B bất kỳ, ta có :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ (hệ thức Chasles)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
- M là trung điểm của đoạn AB, với O bất kỳ, ta có :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

- Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{R} : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = ma_1 + nb_1 \\ c_2 = ma_2 + nb_2 \\ c_3 = ma_3 + nb_3 \end{cases}.$$

- G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \forall O,\ \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

- G là trọng tâm của tứ diện ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \forall O,\ \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

8. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

- $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^3}$

(bất đẳng thức tam giác)

- $|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

$\Leftrightarrow |a_1 b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^3}$

$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^3).(b_1^2 + b_2^2 + b_3^3)$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC VỀ VECTƠ

A. PHƯƠNG PHÁP

- Dùng quy tắc ba điểm để biến đổi : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{R} : \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.
- $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$.

M là trung điểm của đoạn AB : với O bất kỳ ta có : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Trong không gian cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Giải

Ta có : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \underbrace{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}}_{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \vec{0}$$

Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC với G là trọng tâm và một điểm M trong không gian. Chứng minh : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Giải

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 = \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$$

$$+\ MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 = \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\Big(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{0}\Big)$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 0$$

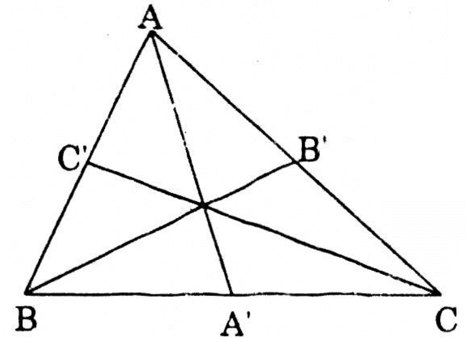
Vậy : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Ví dụ 3

Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Hãy tính giá trị của biểu thức :

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}.$$

Giải



Ta có : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}.\dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CA}.\dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.\dfrac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$

Do đó : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}\right) = 0.$$

vì : $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 4

Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của AB, CD và EF.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

b) Với điểm M bất kỳ trong không gian, chứng minh rằng :

$$4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$$

Giải

a) Ta có : E là trung điểm của AB $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IE}$.

F là trung điểm của CD $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IF}$.

Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) = 2.\vec{0} = \vec{0}$

b) Với M là một điểm bất kỳ, ta có :

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}$$
$$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}$$
$$+$$
$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MI}$$
$$\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MI}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - 4\overrightarrow{MI} \quad (\text{vì : } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0})$$

Vậy $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Vấn đề 2 : TÌM TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM

A. PHƯƠNG PHÁP

- Muốn tìm tọa độ của một vectơ $\vec{x}$ trong hệ tọa độ $\{0; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, ta tìm cách biến đổi đưa về dạng $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$. Bộ ba số thực $(x_1; x_2; x_3)$ là tọa độ của vectơ $\vec{x}$.

- Tọa độ của một điểm M là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ đối với hệ tọa độ là $\{0; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ nghĩa là tìm cách biểu thị vectơ $\overrightarrow{OM}$ dưới dạng :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} \Leftrightarrow M = (x; y; z)$$

(x; y; z) gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ đã cho.

- Trong quá trình biến đổi ta cần chú ý sử dụng các tính chất của các phép toán vectơ đã nêu trong phần tóm tắt lý thuyết.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Trong không gian Oxyz cho ba điểm :A(1; 0; –2), B(2; 1; –1), C(1; –2; –2).

a) Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{BC}$ và tính độ dài đoạn BC.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

a) $\overrightarrow{BC} = (1 - 2; -2 - 1; -2 + 1) = (-1; -3; -1)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$.

b) G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1+2+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{0+1-2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-2-1-2}{3} = -\frac{5}{3}.$$

Vậy $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Ví dụ 2

Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

Giải

a)
$$4\vec{a} = (8; -20; 12)$$
$$-\frac{1}{3}\vec{b} = \left(0; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$
$$3\vec{c} = (3; 21; 6)$$
$$\vec{d} = \left(11; \frac{1}{3}; 18\frac{1}{3}\right)$$

b)
$$\vec{a} = (2; -5; 3)$$
$$-4\vec{b} = (0; -8; 4)$$
$$-2\vec{c} = (-2; -4; 4)$$
$$\vec{e} = (0; -27; 3)$$

Ví dụ 3

Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$, biết rằng :

a) $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ với $\vec{a} = (1; -2; 1)$.

b) $\vec{b} + \vec{x} = 4\vec{b}$ với $\vec{b} = (0; -2; 1)$.

c) $\vec{m} + 2\vec{x} = \vec{n}$ với $\vec{m} = (5; 4; -1)$, $\vec{n} = (2; -5; 3)$.

Giải

a) $\vec{x} = -\vec{a}$, do đó $\vec{x} = (-1; 2; -1)$.

b) $\vec{x} = 3\vec{b}$, do đó $\vec{x} = (0; -6; 3)$.

c) $\vec{x} = \frac{\vec{n} - \vec{m}}{2}$. Ta có $\vec{n} - \vec{m} = (-3; -9; 4)$.

Vậy $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{n} - \vec{m}) = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; 2\right)$.

Vấn đề 3 : CHỨNG MINH BA VECTƠ ĐỒNG PHẲNG HOẶC KHÔNG ĐỒNG PHẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

- Muốn chứng minh ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng ta chứng minh có hệ thức : $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ trong đó $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.

- Muốn chứng minh ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng ta dùng phương pháp phản chứng, giả sử chúng đồng phẳng nghĩa là có hệ thức $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ trong đó $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.

Sau đó chứng tỏ rằng không tồn tại đẳng thức trên (tồn tại là vô lý).

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Trong không gian Oxyz cho ba vectơ : $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (5; 7; 0)$, $\vec{c} = (3; -2; 4)$.

a) Hãy chứng tỏ rằng ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ này không đồng phẳng.

b) Cho vectơ $\vec{d} = (4; 12; -3)$. Hãy phân tích vectơ $\vec{d}$ theo ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đã cho.

Giải

a) Ta dùng phương pháp phản chứng. Theo giả thiết $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không cùng phương vì $\frac{5}{3} \neq \frac{7}{-2} \neq \frac{0}{4}$.

Giả sử $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng, nghĩa là $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

Thay tọa độ của các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vào ta được hệ 3 phương trình với 2 ẩn là m và n :

$$\begin{cases} 2 = 5m + 3n & (1) \\ 3 = 7m - 2n & (2) \\ 1 = 4n & (3) \end{cases} \quad (2) \text{ và } (3) \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{4} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Thay các giá trị của m và n vào (1) ta có :

(1) $\Rightarrow 2 \neq \frac{5}{2} + \frac{3}{4}$. Vậy hệ phương trình vô nghiệm, nghĩa là không tồn tại hệ thức $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$. Do đó, ba vectơ : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

b) Ta tìm các số p, q, r sao cho $\vec{d} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$. Ta có :

$$\begin{cases}4 = 2p + 5q + 3r \\ 12 = 3p + 7q = 2r \\ -3 = p + 0 + 4r\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p = 1 \\ q = 1 \\ r = -1\end{cases} \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$

Ví dụ 2

> Trong không gian Oxyz cho ba vectơ : $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (4; 5; 6)$, $\vec{c} = (2; 1; 0)$.
>
> Chứng tỏ rằng ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Giải

Ta nhận thấy hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương vì $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{5} \neq \frac{3}{6}$.

Muốn chứng minh $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng ta cần tìm hai số m và n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Theo giả thiết ta có : $\begin{cases}2 = m + 4n \\ 1 = 2m + 5n \\ 0 = 3m + 6n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = -2 \\ n = 1\end{cases}$.

Do đó $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, nghĩa là ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Ví dụ 4

> Trong không gian 0xyz cho bốn điểm A(1; 1; –2), B(4; 0; – 1) C(–1; 7; 0), D(0; –2; – 4).
>
> Chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một mặt phẳng.

Giải

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (3; -1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 6, 2)$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương vì $-\frac{3}{2} \neq -\frac{1}{6} \neq \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AD} = (-1; -3; -2)$.

Muốn chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một mặt phẳng, ta chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng nghĩa là tồn tại hai số m, n sao cho : $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$.

Ta có $\begin{cases}-1 = 3m - 2n \\ -3 = -m + 6n \\ -2 = m + 2n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}n = -\frac{5}{8} \\ m = -\frac{6}{8}\end{cases}$

Do đó $\overrightarrow{AD} = -\frac{6}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{8}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ 3 vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ đồng phẳng. Ta suy ra bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một mặt phẳng.

Vấn đề 4 : CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Chứng minh hai đường thẳng song song.
- Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

A. PHƯƠNG PHÁP

- Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh :

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}.$$

- Muốn chứng minh hai đường thẳng a // b, trên a ta lấy vectơ $\overrightarrow{AB}$ và trên b ta lấy vectơ $\overrightarrow{CD}$ rồi chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$.

- Muốn chứng minh hai đường thẳng a ⊥ b, trên a lấy vectơ $\overrightarrow{AB}$ và trên b ta lấy vectơ $\overrightarrow{CD}$ rồi chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

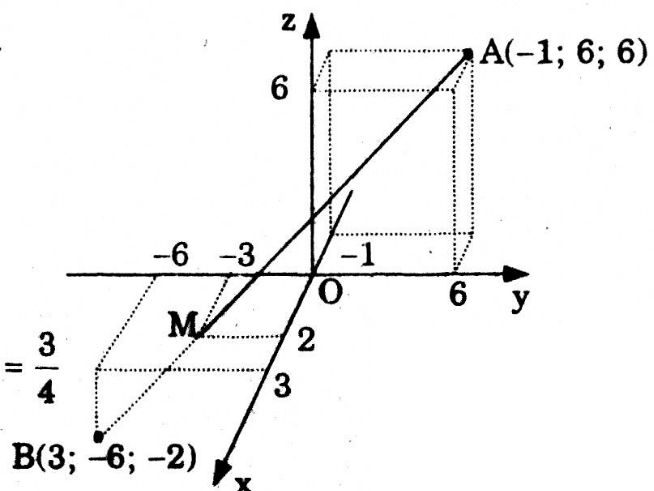
B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Cho hai điểm A(–1; 6; 6) và B(3; –6; –2). Tìm điểm M thuộc mặt phẳng Oxy của hệ tọa độ Oxyz sao cho AM + MB ngắn nhất.

Giải

Hai điểm A, B nằm về hai phía khác nhau của mặt phẳng Oxy vì $z_A = 6$ và $z_B = -2$. Do đó, khi ba điểm A, M, B thẳng hàng ta có AM + MB ngắn nhất.



A, M, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$

Ta có : M(x; y; 0) vì M ∈ mp Oxy

$\overrightarrow{AM} = (x + 1; y - 6; 0 - 6)$

$\overrightarrow{AB} = (4; -12; -8)$

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-6}{-12} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy : M(2; –3; 0).

Ví dụ 2

Cho hình hộp xiên ABCDA'B'C'D'. Hãy tìm điểm M trên đường chéo AC của mặt đáy ABCD và điểm N trên đường chéo C'D của mặt bên CDD'C' sao cho MN // BD'. Khi đó tính $\frac{MN}{BD'}$.

Giải

Đặt : $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$

Ta có : $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Vì MN // BD' nên ta có : $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$

hay $\overrightarrow{MN} = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$ (1)

Mặt khác ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N}$

Giả sử : $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC} = n(\vec{c} - \vec{a})$, $\overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D} = m(\vec{a} - \vec{b})$

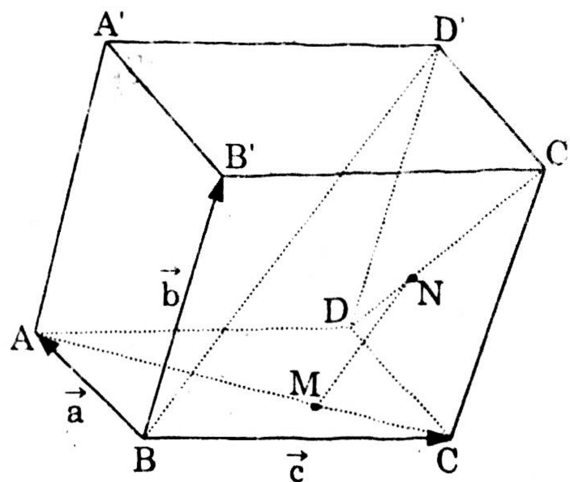
Do đó : $\overrightarrow{MN} = n\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} + m\overrightarrow{C'D}$ với $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{b}$

$\overrightarrow{MN} = n(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + m(\vec{a} - \vec{b})$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = (m - n)\vec{a} + (1 - m)\vec{b} + n\vec{c}$ (2).

So sánh (1) và (2), ta có hệ 3 phương trình 3 ẩn.

$$\begin{cases} m - n = k \\ 1 - m = k \\ n = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ n = \frac{1}{3} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$$



Vậy : $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C'D}$.

Như vậy các điểm M và N đã được xác định trên AC và C'D.

Do $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}$ nên ta có $\frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{BD'}} = \frac{1}{3}$ hay $\frac{MN}{BD'} = \frac{1}{3}$.

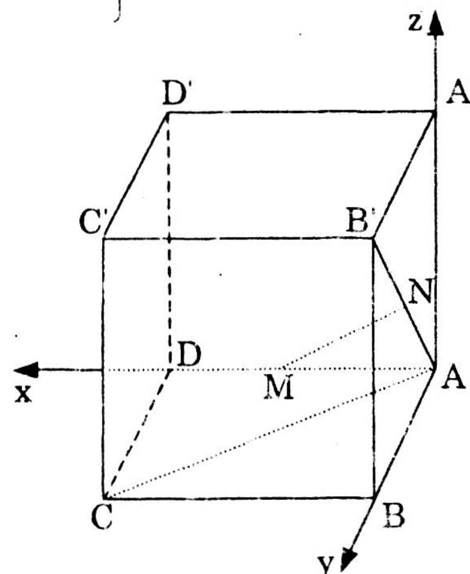
Ví dụ 3

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AB'. Chứng minh MN ⊥ AC.

Giải

Chọn A làm gốc tọa độ và với hệ tọa độ $\left\{A; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right\}$

trong đó $\vec{e_1} = \overrightarrow{AD}, \vec{e_2} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{AA'}$.



Ta có : A(0; 0; 0), D(a; 0; 0),

B(0; a; 0), A' (0; 0; a),

C(a; a; 0), B'(0; a; a).

M là trung điểm của AD nên $M\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$,

N là trung điểm của AB' nên $N\left(0; \frac{2}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AC} = (a; a; 0)$

Ta có : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 = 0$. Vậy MN ⊥ AC.

Vấn đề 5 : CHỨNG MINH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC

A. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các tính chất :

- $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$.
- $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Chứng minh bất đẳng thức : $a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$ với a, b, c là ba số thực cho trước.

Giải

Đặt $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{v} = (1; 1; 1)$ trong hệ trục tọa độ Oxyz.

Ta có : $\vec{u}\,\vec{v} \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$

Hay $a + b + c \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$.

Vậy $a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Ví dụ 2

Với x là một số thực. Chứng minh rằng :

$$\left|\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x}\right| \leq 3.$$

Giải

Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc Oxyz, cho các vectơ :

$$\vec{a}\,(\sin x;\ 1;\ \sqrt{2-\sin^2 x}\,),\quad \vec{b}\,(1;\ \sqrt{2-\sin^2 x}\,;\ \sin x).$$

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = \sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{2-\sin^2 x}$

và $|\vec{a}||\vec{b}| = \sqrt{\sin^2 x + 1 + 2 - \sin^2 x}.\sqrt{1 + 2 - \sin^2 x + \sin^2 x}$

$\Rightarrow |\vec{a}|.|\vec{b}| = 3.$

Vì $|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$ nên ta có :

$$|\sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{2-\sin^2 x}\,| \le 3.$$

Ví dụ 3

> Với a, b, c là các số thực, chứng minh rằng :
>
> a) $\sqrt{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{3} \ge \sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2}$.
>
> b) $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Giải

a) Trong không gian với hệ trục tọa độ Đềcác vuông góc Oxyz, cho các vectơ

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = \overrightarrow{OM} = (a\,;b\,;c)\\ \vec{v} = \overrightarrow{ON} = (1\,;1\,;1)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{MN} = (1-a;\ 1-b;\ 1-c)$$

Ta có $|\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{ON}| \ge |\overrightarrow{MN}|$.

Do đó : $\sqrt{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{3} \ge \sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2}$.

b) Với $\vec{u} = (a;\ b;\ c)$, $\vec{v} = (1;\ 1;\ 1)$, ta có $(\vec{u}.\vec{v})^2 \le \vec{u}^2.\vec{v}^2$

hay $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

> Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA người ta lần lượt lấy các điểm A', B', C', D' sao cho với một điểm O trong không gian, ta luôn luôn có đẳng thức : $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.
>
> Chứng minh rằng khi đó ta có : $\dfrac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{BC}} = \dfrac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{CD}} = \dfrac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{DA}}$.

Giải

Theo giả thiết ta có đẳng thức :

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0} \qquad (1)$$

Giả sử $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB'} = l\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC'} = m\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DD'} = n\overrightarrow{DA}$.

Từ (1) $\Rightarrow$ $k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{CD} + n\overrightarrow{DA} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow k\overrightarrow{AB} + l(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + m(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - n\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (k - l)\overrightarrow{AB} + (l - m)\overrightarrow{AC} + (m - n)\overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

Vì ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng và khác $\vec{0}$ nên ta có :

$$k - l = l - m = m - n = 0.$$

Do đó : $k = l = m = n$

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{DA}}.$$

Bài 2

Cho tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' là các điểm lần lượt lấy trên các đoạn AB, BC, CD, DA sao cho :

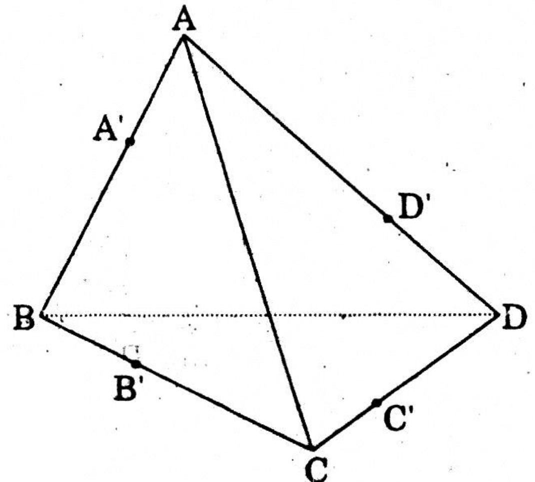
$$\overrightarrow{A'A} = k\overrightarrow{A'B},\ \overrightarrow{B'B} = k\overrightarrow{B'C},\ \overrightarrow{C'C} = k\overrightarrow{C'D},\ \overrightarrow{D'D} = k\overrightarrow{D'D}.$$

a) Chứng minh với điểm O bất kỳ trong không gian, ta luôn có :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}.$$

b) Với k = –1 ta được A'B'C'D' là hình gì ?

Giải



a) Từ hệ thức $\overrightarrow{A'A} = k\overrightarrow{A'B}$ ta có điểm A' chia đoạn AB theo tỉ số k nên :

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA'})$$

Do đó : $\overrightarrow{OA'}(1 - k) = \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k} \text{ với } k \neq 1.$$

Tương tự ta có :

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{\overrightarrow{OB} - k\,\overrightarrow{OC}}{1-k}; \quad \overrightarrow{OC'} = \frac{\overrightarrow{OC} - k\,\overrightarrow{OD}}{1-k}; \quad \overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OD} - k\,\overrightarrow{OA}}{1-k}$$

Do đó :

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})}{1-k}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})(1-k)}{1-k}.$$

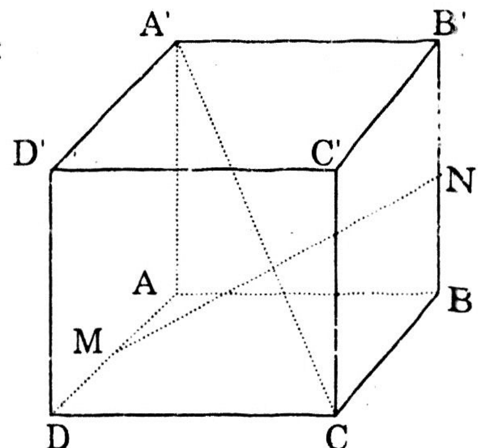
Vậy : $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

b) Với k = −1, ta có A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Khi đó A'B'C'D' là một hình bình hành vì có A'B' // D'C' // AC và A'D' // B'C' // BD.

Bài 3.

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BB'. Chứng minh rằng : MN ⊥ AC.

Giải



Chọn hệ trục tọa độ có gốc là A và các vectơ :

$\vec{e_1} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{AA'}$

Ta có : A(0; 0; 0), D(1; 0; 0),

B(0; 1; 0), C(1; 1; 0)

A'(0; 0; 1), $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$,

$N\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)\\ \overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 0$$

Vậy MN ⊥ AC.

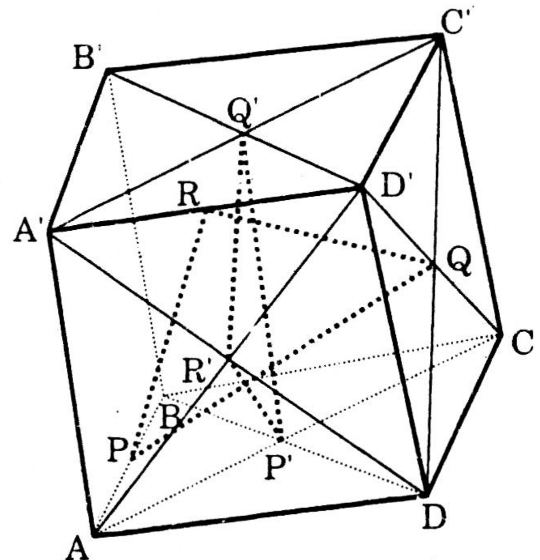
Bài 4

Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng hai tam giác PQR và P'Q'R' có cùng trọng tâm.

Giải



a) Ta có :

$$\overrightarrow{PP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'}$$

$$\overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$$

$$\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \vec{0}$$

b) Giả sử G là trọng tâm của tam giác PQR, ta có : $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$

Mặt khác :

$$\overrightarrow{GP'} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PP'}$$

$$\overrightarrow{GQ'} = \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QQ'}$$

$$\overrightarrow{GR'} = \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RR'}$$

$$\overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = \underbrace{\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'}}_{=\vec{0}}$$

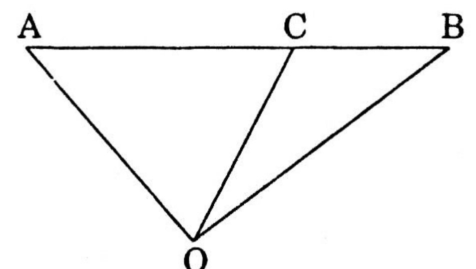
Do đó : $\overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = \vec{0}$ và ta suy ra; G cũng là trọng tâm của tam giác P'Q'R'.

Bài 5

Cho C là một điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$. Chứng minh rằng với O là một điểm bất kỳ trong không gian, ta luôn có :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

Giải



Theo giả thiết :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{AC}{AC + CB} = \frac{m}{m+n}$$

Do đó : $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ với O là một điểm bất kỳ.

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$

Bài 6

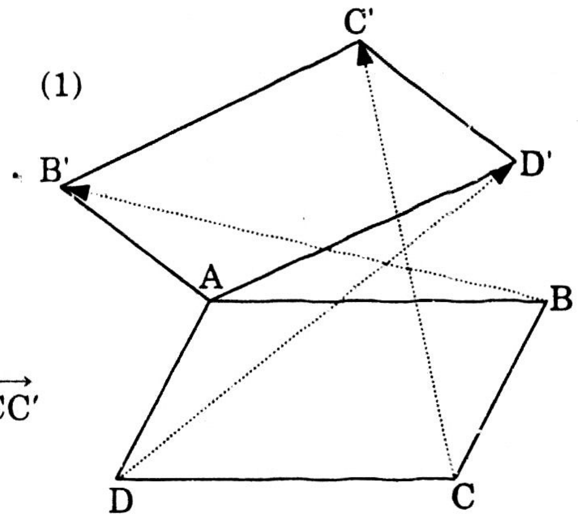
Cho ABCD và A'B'C'D' là hai hình bình hành trong không gian có chung một điểm A. Chứng minh rằng các vectơ $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ đồng phẳng.

Giải

Ta có : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'}$

$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD'}$

$$\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}) \quad (1)$$



ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và A'B'C'D' cũng là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{D'C'}$. Thay các kết quả này vào (1) ta có :

$$\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \underbrace{\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}}_{\overrightarrow{CA}} + \underbrace{\overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{DA}}_{AC'} = \overrightarrow{CC'}$$

Vậy : $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'}$ (2)

Hệ thức (2) biểu thị ba vectơ $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ đồng phẳng.

Bài 7

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm : A(1; 2; –1), B(–4; 7; 5), C(2; –1; 3).

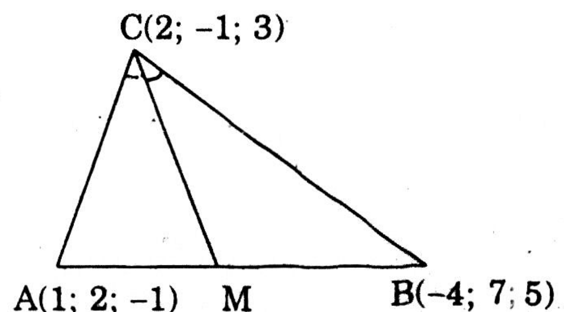
a) Chứng tỏ rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Đường phân giác trong tại đỉnh C của tam giác ABC cắt cạnh AB tại M. Tính độ dài đoạn CM.

Giải

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-5; 5; 6)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -3; 4)$

và nhận thấy $-\frac{5}{1} \neq \frac{5}{-3} \neq \frac{6}{4}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nghĩa là ba điểm A, B, C không thẳng hàng.



b) Ta biết rằng đường phân giác trong của một tam giác chia cạnh đối diện ra hai đoạn tỉ lệ với độ dài hai cạnh bên tương ứng nghĩa là : $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$.

Ta có : $CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(1-2)^2 + (2+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{26}$

$CB = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-4-2)^2 + (7+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{104}$

Vậy : $\dfrac{CA}{CB} = \sqrt{\dfrac{26}{104}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{MA}{MB}$

Ta có hệ thức $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ với $k = -\dfrac{1}{2}$ (vì $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng).

Ta có : $M : \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} = \dfrac{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right).(-4)}{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1-2}{\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{2}{3} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} = \dfrac{2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right).7}{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{2 + \dfrac{7}{2}}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{11}{3} \\ Z_M = \dfrac{Z_A - kZ_B}{1-k} = \dfrac{-1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right).5}{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}} = 1 \end{cases}$

Tọa độ điểm $M\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{11}{3}; 1\right)$

$CM = |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{\left(-\dfrac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\dfrac{11}{3} + 1\right)^2 + (1-3)^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{64 + 196 + 36} = \dfrac{2}{3}\sqrt{74}$.

Độ dài đoạn CM là : $CM = \dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.

Bài 8

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(1; 2; 4), B(2; –1; 0), C(–2; 3; –1).

a) Chứng tỏ ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác. Gọi M là điểm có tọa độ (x; y; z). Tìm điều kiện để bốn điểm A, B, C, M đồng phẳng.

b) Tìm tọa độ điểm D biết rằng ABCD là một hình bình hành.

c) Tìm diện tích hình bình hành ABCD đó.

Giải

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1; -3; -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-3; 1; -5) \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{-4}{-5} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

Ta có : A, B, C, M đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = m - 3n & (1) \\ y - 2 = -3m + n & (2) \\ z - 4 = -4m - 5n & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra : $m = \dfrac{x + 3y - 7}{-8}$; $n = \dfrac{3x - y - 5}{-8}$.

Thay các giá trị tìm được của m và n vào (3), ta có :

$$z - 4 = \frac{x + 3y - 7}{2} + \frac{5(3x - y - 5)}{8} \Leftrightarrow 19x + 17y - 8x - 21 = 0.$$

Vậy điều kiện để bốn điểm A, B, C, M đồng phẳng là có hệ thức :

$$19x + 17y - 8x - 21 = 0.$$

b) ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Giả sử $D(x_D; y_D; z_D)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2 - x_D \\ -3 = 3 - y_D \\ -4 = -1 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 6 \\ z_D = 3 \end{cases}$$

c) $\vec{s} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Ta biết rằng $|\vec{s}|$ = diện tích hình bình hành ABCD :

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (19; 17; 8)$$

Do đó : $|\vec{s}| = \sqrt{19^2 + 17^2 + 8^2} = \sqrt{361 + 289 + 64} = \sqrt{714}$ đvdt.

Vậy diện tích hình bình hành ABCD là $|\vec{s}| = \sqrt{714}$ (đvdt).

Bài 9

Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý. Hãy chứng minh :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

Hệ thức trên là đẳng thức Euler, hãy dùng hệ thức Euler để chứng minh :

- Ba đường cao của một tam giác đồng quy.
- Nếu một hình tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc.

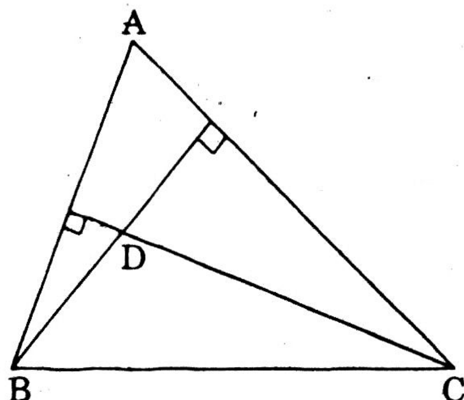
Giải

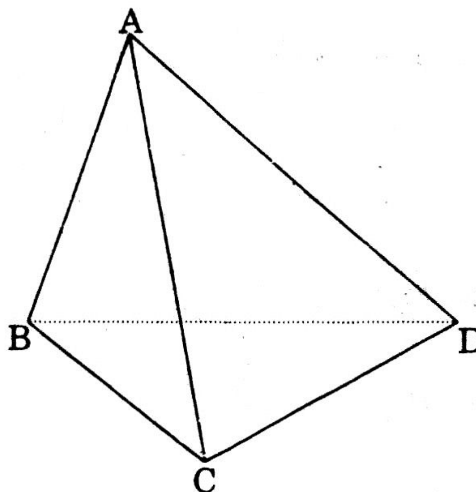
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$$

Cộng từng vế ba đẳng thức trên, ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\overrightarrow{BC} = 0$ là đpcm.





Trong tam giác ABC gọi D là giao điểm của hai đường cao xuất phát từ C và B ta có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = 0$ vì AB ⊥ CD.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$ vì AC ⊥ DB.

Dựa vào đẳng thức Euler ta suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AD \perp BC$.

Vậy AD là đường cao vẽ từ A và như vậy D là trực tâm của tam giác ABC.

Đối với tứ diện ABCD ta có :

Nếu AB ⊥ CD thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

Nếu AC ⊥ DB thì $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$

Theo đẳng thức Euler ta suy ra : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AD \perp BC$.

Chú ý : *Ta có thể phân tích cách khác như sau :*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}.$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$$

Cộng từng vế ba đẳng thức trên ta dễ dàng chứng minh được đẳng thức Euler.

Bài 10

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Gọi P, Q là các điểm lần lượt xác định bởi $\overrightarrow{AP'} = -\overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{C'Q} = -\overrightarrow{C'D}$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trung điểm M của cạnh BB'.

b) Tính độ dài đoạn thẳng PQ.

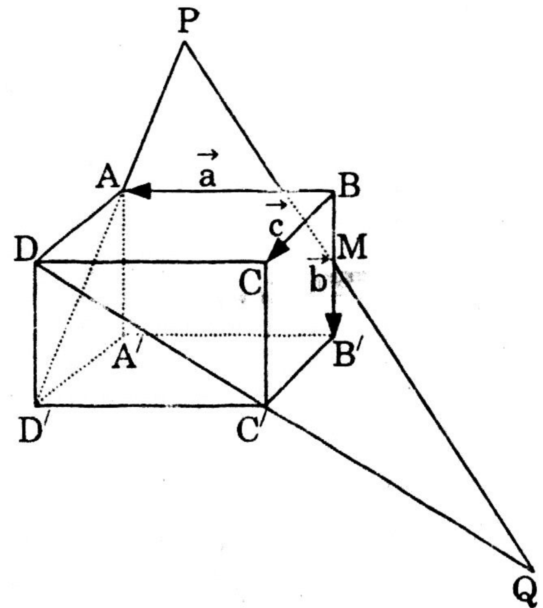
Giải

a) Ta cần chứng minh ba điểm : P, M, Q thẳng hàng.

Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

Ta có : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{\vec{b}}{2} + \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$ vì $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{C'B}$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q} = \frac{\vec{b}}{2} + \vec{c} - (\vec{a} - \vec{b}) \text{ vì } \overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{AB'}$$



Do đó $\overrightarrow{MP} = \vec{a} - \vec{c} - \frac{3}{2}\vec{b}$

và $\overrightarrow{MQ} = -\vec{a} + \vec{c} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

Dựa vào kết quả trên ta có :

$$\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MQ}.$$

Như vậy M là trung điểm của đoạn PQ (tất nhiên là ba điểm P, M, Q thẳng hàng).

b) Ta có : PQ = 2MP mà $\overrightarrow{MP} = \vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} - \vec{c}$

$$MP^2 = \overrightarrow{MP}^2 \left(\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} - \vec{c}\right)^2 = \vec{a}^2 + \frac{9}{4}\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 0.$$

Chú ý rằng vì các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đôi một vuông góc với nhau nên ta có :
$\vec{a}.\vec{b} = 0$, $\vec{b}.\vec{c} = 0$, $\vec{c}.\vec{a} = 0$. Mặt khác ta có $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = a^2$.

Do đó : $MP^2 = a^2 + \frac{9}{4}a^2 + a^2 = \frac{17}{4}a^2 \Rightarrow MP = \frac{1}{2}a\sqrt{17}$.

Vậy $PQ = 2MP = a\sqrt{17}$.

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D' có : $\overrightarrow{B'A'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{c}$. Gọi M là điểm chia đoạn thẳng AC' theo tỉ số m nghĩa là $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MC'}} = m$ và N là điểm chia đoạn thẳng CD' theo tỉ số n nghĩa là $\frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{ND'}} = n$.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{B'M}$, $\overrightarrow{B'N}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

b) Xác định m, n để đường thẳng MN song song với đường thẳng B'D.

ĐS : a) $\overrightarrow{B'M} = -\frac{1}{m-1}\vec{a} - \frac{1}{m-1}\vec{b} + \frac{m}{m-1}\vec{c}$

$\overrightarrow{B'N} = -\frac{n}{n-1}\vec{a} - \frac{1}{n-1}\vec{b} + \vec{c}$.

b) **Hướng dẫn :** MN // B'D $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{B'D}$, trong đó :

$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\vec{a} + \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\vec{b} + \left(1 - \frac{m}{m-1}\right)\vec{c}$.

$\overrightarrow{B'D} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Muốn MN // B'D ta phải có : $\begin{cases} m = -3 \\ n = -1 \end{cases}$.

02. Cho khối tứ diện ABCD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của DA và BC. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.   b) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

03. Trong không gian cho một điểm O và bốn điểm A, B, C, D phân biệt, không thẳng hàng. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ABCD là một hình bình hành là : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

04. Trong không gian cho tam giác ABC có A(1; –1; –3), B(2; 1; –2) C(–5; 2; 6). Đường phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại D. Hãy tính tọa độ điểm D và chiều dài đoạn AD.

ĐS : $D\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -3\right)$, $AD = \frac{3\sqrt{10}}{4}$.

05. Trong không gian cho các vectơ :

$\vec{a} = (-1; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; -3; -4)$, $\vec{c} = (-3; 12; 6)$.

Chứng minh ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng và tính $\vec{c}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

ĐS : $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

06. Cho vectơ $\vec{e_1} = (1; 0; 0)$, $\vec{e_2} = (0; 1; 0)$, $\vec{e_3} = (0; 0; 1)$.

Biết : $\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{b} = \vec{e_2} + \vec{e_3}$ và $\vec{c} = \vec{e_1} + m\vec{e_2} + n\vec{e_3}$

a) Tính góc của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Định m và n để vectơ $\vec{c}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Tính độ dài của vectơ $\vec{c}$.

ĐS : a) $\cos(\vec{a};\vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a};\vec{b}) = 60^0$.

b) $\vec{c} = (1; m; n)$ với $m = -1$, $n = 1$ và $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

07. Cho các vectơ $\vec{a} = (4; -2; -4)$ và $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Hãy tính tích vô hướng $(2\vec{a} - 3\vec{b}).(\vec{a} + 2\vec{b})$.

ĐS : Tích vô hướng là -200.

08. Trong không gian cho hai hệ vectơ sau đây, hệ nào đồng phẳng ?

a) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (4; 5; 6)$, $\vec{c} = (2; 1; 0)$.

b) $\vec{m} = (-1; 2; 3)$, $\vec{n} = (1; -2; 0)$, $\vec{p} = (0; 1; 1)$.

ĐS : Hệ $\left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\right\}$ đồng phẳng, hệ $\left\{\vec{m}; \vec{n}; \vec{p}\right\}$ không đồng phẳng.

09. Tính diện tích tam giác ABC cho biết A(7; 3; 4), B(1; 0; 6) và C(4; 5; −2).

ĐS : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = \frac{49}{2}$.

10. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, AD, BC. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PQ}$.

11. Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Chứng minh điểm O là duy nhất.

Hướng dẫn : Lấy E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy O là trung điểm của EF, ta có $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

12. Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC biết : A(2; 1; −3), B(3; −2; 2) và C(4; 0; 1).

a) Ta có AH ⊥ BC tại H. Tìm tọa độ của H và tính $|\overrightarrow{AH}|$.

b) Tìm diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn :

a) $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ với H(x; y; z) ta có : $x + 2y - z = 0$ (1)

với $\overrightarrow{BH} \,//\, \overrightarrow{BC}$ ta có : $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta tính được $H\left(\frac{14}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ và $AH = \sqrt{\frac{55}{3}}$.

b) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}\sqrt{6}.\sqrt{\frac{55}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{110}$ (vì $BC = \sqrt{6}$).

Chú ý : *Có thể tính bằng cách áp dụng công thức :*

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|.$$

13. Cho các số thực a, b, c, d, e, f. Chứng minh rằng :

$$(ab + cd + ef)^2 \leq (a^2 + c^2 + e^2)(b^2 + d^2 + f^2)$$

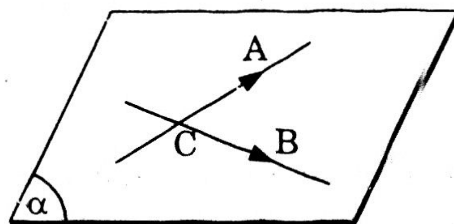
Hướng dẫn : Đặt : $\vec{u} = (a; c; e)$; $\vec{v} = (b; d; f)$ rồi dùng tính chất

$(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq \vec{u}^2.\vec{v}^2$ để chứng minh.

Chuyên đề 8 : MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

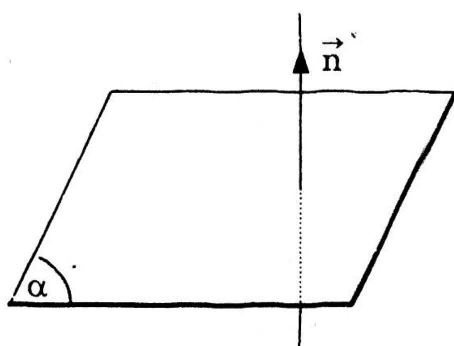
1. CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẲNG



Giả sử mặt phẳng (α) xác định bởi ba điểm A, B, C không thẳng hàng, khi đó hai vectơ $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ được gọi là **cặp vectơ chỉ phương** của mặt phẳng (α), ($\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương).

Như vậy mặt phẳng (α) hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một cặp vectơ chỉ phương của nó.

2. VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG



Vectơ $\vec{n}$ khác vectơ $\vec{0}$ được gọi là **vectơ pháp tuyến** của mặt phẳng (α) nếu nó nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ấy và được ký hiệu $\vec{n} \perp (\alpha)$.

Mặt phẳng (α) hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một vectơ pháp tuyến của nó.

Chú ý : *Trong không gian Oxyz nếu* $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ *là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) thì khi đó vectơ pháp tuyến* $\vec{n}$ *của (α) có tọa độ là :*

$$\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Hiển nhiên là $\vec{n} \perp \vec{a}$ *và* $\vec{n} \perp \vec{b}$.

3. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho trước, mỗi mặt phẳng là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ (x; y; z) thỏa mãn một phương trình có dạng :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \qquad (1)$$

Ngược lại tập hợp tất cả các điểm có tọa độ thỏa mãn phương trình (1) là một mặt phẳng. Phương trình (1) được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng (α).

- Nếu mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm một vectơ pháp tuyến thì nó có phương trình tổng quát là :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0).$$

• Nếu (α) là mặt phẳng có phương trình là : $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của nó.

4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI VECTƠ MẶT PHẲNG

Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình tổng quát là :

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(\alpha') : A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Khi đó vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ và $\vec{n'} = (A'; B'; C')$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (α) và (α')

a) Hai mặt phẳng (α) và (α') **cắt nhau** theo giao tuyến là một đường thẳng khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến không cùng phương, nghĩa là :

(α) cắt (α') ⇔ $A : B : C \neq A' : B' : C'$

b) Hai mặt phẳng (α) và (α') **trùng nhau** khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ cùng phương và hai mặt phẳng đó có chung nhau một điểm.

(α) trùng với (α') ⇔ $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$.

c) Hai mặt phẳng (α) và (α') **song song** với nhau khi và chỉ khi chúng không cắt nhau và không trùng nhau.

(α) // (α') ⇔ $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$.

5. CHÙM MẶT PHẲNG

Cho hai mặt phẳng (α) và (α') cắt nhau. Tập hợp các mặt phẳng qua giao tuyến của (α) và (α') gọi là một chùm mặt phẳng.

Giả sử (α), (α') cắt nhau, lần lượt có phương trình :

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$(\alpha') : A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Khi đó mỗi mặt phẳng qua giao tuyến của (α) và (α') đều có phương trình dạng :

$$m(Ax + By + Cz + D) + n(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \quad (2)$$

với $m^2 + n^2 \neq 0$.

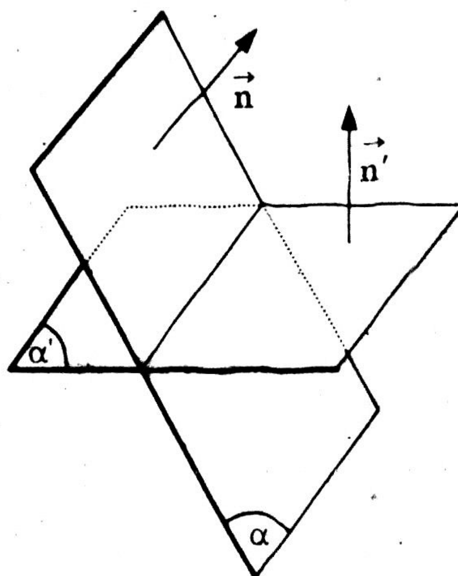
Ngược lại mỗi phương trình dạng (2) đều là phương trình của một mặt phẳng qua giao tuyến của (α) và (α').

6. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình :

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(\alpha') : A'x + B'y + C'z + D = 0$$



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (α').

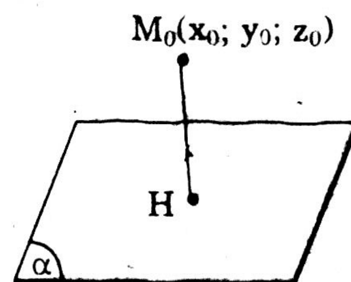
Khi đó φ bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (α) và (α'). Vậy φ bằng hoặc bù với góc tạo bởi hai vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ và $\vec{n'} = (A'; B'; C')$ của (α) và (α').

Do đó :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n'}\right|} = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Do đó : $(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

7. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG



Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ được tính theo công thức :

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

8. CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

Trường hợp tổng quát : $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

- $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$: mặt phẳng đi qua gốc tọa độ.
- $C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0$: mặt phẳng song song với trục Oz.
- $B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0$: mặt phẳng song song với trục Oy.
- $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$: mặt phẳng song song với trục Ox.
- $C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$: mặt phẳng chứa trục Oz.
- $B = C = D = 0 \Rightarrow x = 0$: mặt phẳng (Oyz).

Tương tự : $y = 0$: mặt phẳng (Ozx)

$z = 0$: mặt phẳng (Oxy)

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

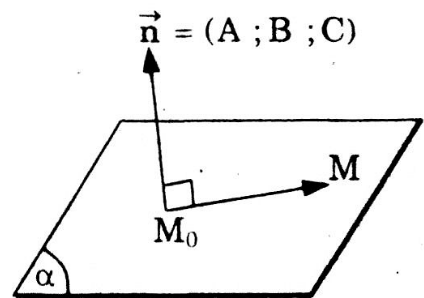
Vấn đề 1 : LẬP PHƯƠNG TRÌNH CỦA MẶT PHẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Muốn lập phương trình của mặt phẳng (α) ta cần tìm điều kiện cần và đủ tập hợp các điểm M(x; y; z) thuộc (α). Ta có các trường hợp :

- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến.

$M(x; y; z) \in (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} . \overrightarrow{M_0M} = 0 \quad \left(\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}\right).$



$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$

Phương trình (1) được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng (α).

- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vectơ chỉ phương (tất nhiên $\vec{a}$, $\vec{b}$ phải không cùng phương)

$M(x; y; z) \in (\alpha) \Leftrightarrow$ 3 vectơ $\left\{\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}\right\}$ đồng phẳng.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = m\vec{a} + n\vec{b} \quad \text{(m, n là các tham số)}$$

Viết hệ thức trên dưới dạng tọa độ, ta có :

$$\begin{cases} x - x_0 = ma_1 + nb_1 \\ y - y_0 = ma_2 + nb_2 \\ z - z_0 = ma_3 + nb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ma_1 + nb_1 \\ y = y_0 + ma_2 + nb_2 \\ z = z_0 + ma_3 + nb_3 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (2) được gọi là phương trình tham số của mặt phẳng (α). Từ phương trình (2) nếu khử các tham số m, n này ta được phương trình tổng quát của (α). Mặt khác, ta có thể tìm được vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (α) khi biết cặp vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ của (α). Ta có :

$$\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Do đó, ta được phương trình tổng quát của (α) là :

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0.$$

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hãy viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(0; -1; 4)$ và nhận các vectơ $\vec{u} = (3; 2; 1)$, $\vec{v} = (-3; 0; 1)$ làm cặp vectơ chỉ phương.

Giải

$M(x; y; z) \in (\alpha) \Leftrightarrow \left\{\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right\}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = m\vec{u} + n\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 3m - 3n \\ y + 1 = 2m \\ z - 4 = m + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3m - 3n & (1) \\ y = -1 + 2m & (2) \\ z = 4 + m + n & (3) \end{cases}$$

❐ **Cách 1 :** Khử tham số

Từ (2) $\Rightarrow m = \dfrac{y+1}{2}$

Từ (3) $\Rightarrow n = z - 4 - m = z - 4 - \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{2z - y - 9}{2}$.

Thay giá trị của m và n vào (1) ta có :

$$x = \frac{3(y+1)}{2} - \frac{3(2z - y - 9)}{2} \Leftrightarrow 2x - 6y + 6z - 30 = 0.$$

Rút gọn ta được phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là :

$$x - 3y - 3z - 15 = 0.$$

❐ **Cách 2 :** Dùng vectơ pháp tuyến

Mặt phẳng (α) có hai vectơ chỉ phương là : $\vec{u} = (3; 2; 1)$, $\vec{v} = (-3; 0; 1)$

Do đó (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ là :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2; -6; 6)$$

Ta chọn vectơ $\vec{n}' = (1; -3; 3)$ cùng phương với $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến của (α).

Ta có : $M(x; y; z) \in (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}'.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 1(x - 0) - 3(y + 1) + 3(z - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 2y + 3z - 15 = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là : $x - 3y + 3z - 15 = 0$.

Ví dụ 2

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình tham số và phường trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A(1; 1; 1) B(2; 4; 5), C(4; 1; 2).

Giải

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 4)$; $\overrightarrow{AC} = (3; 0; 1)$

Ta có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α)

$M(x; y; z) \in (\alpha) \Leftrightarrow \left\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = m + 3n \\ y - 1 = 3m \\ z - 1 = 4m + n \end{cases}$$

Ta có phương trình tham số của mặt phẳng (α) là : $\begin{cases} x = 1 + m + 3n & (1) \\ y = 1 + 3m & (2) \\ z = 1 + 4m - n & (3) \end{cases}$

Từ (2) ta có : $m = \dfrac{y-1}{3}$.

Từ (3) ta có : $n = z - 1 - 4m = z - 1 - \dfrac{4(y-1)}{3} = \dfrac{3z - 4y + 1}{3}$.

Thay các gía trị của m và n vào (1) ta có :

$$x = 1 + \frac{y-1}{3} + 3z - 4y + 1 \Leftrightarrow 3x + 11y - 9z - 5 = 0.$$

Ta được phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là :

$$3x + 11y - 9z - 5 = 0$$

Nhận xét : Ta có thể lập phương trình tổng quát của (α) bằng cách tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ của mặt phẳng (α)

Ta có : $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (3; 11; -9).$

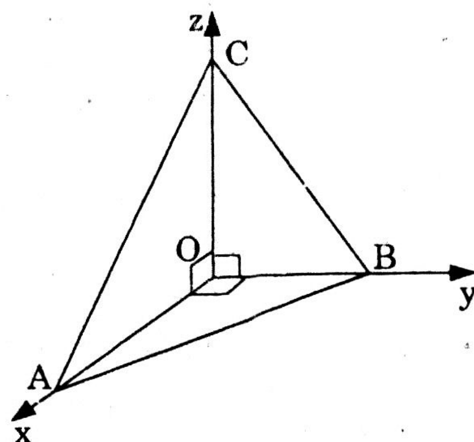
Vậy phương trình tổng quát có dạng :

$$3(x-1) + 11(y-1) - 9(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 11y - 9z - 5 = 0.$$

Ví dụ 3

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm lần lượt nằm trên ba trục tọa độ là : A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), với a, b, c ≠ 0. Hãy lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C đó.

Giải



Mặt phẳng (ABC) có hai vectơ chỉ phương là :

$\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-a; 0; c)$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ta có :

$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} \right) = (bc; ca; ab).$

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A(a; 0; 0) có dạng :

$$bc(x-a) + ca(y-0) + ab(z-0) = 0 \Leftrightarrow bcx + cay + abz = abc.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại : A(a; 0; 0) B(0; b; 0), C(0; 0; c) nên phương trình trên được gọi là phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn (là một dạng của phương trình tổng quát).

Ví dụ 4

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua hai điểm M(4; –1; 1), N(3; 1; 2) và song song với trục Ox.

Giải

Mặt phẳng (α) đi qua M, N và song song với trục Ox có hai vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; 1)$ và $\vec{e_1} = (1; 0; 0)$. Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) ta có :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (0; 1; -2)$$

Phương trình tổng quát của (α) đi qua điểm M(4; –1; 1) có dạng :

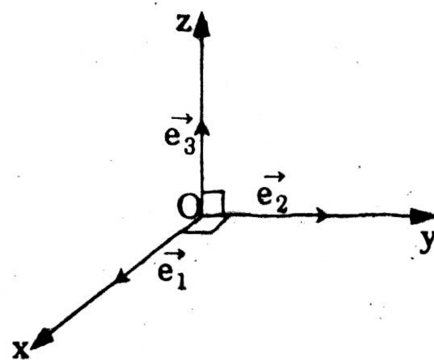
$$0(x - 4) + 1(y + 1) - 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow y - 2x + 3 = 0.$$

Nhận xét : *Phương trình tổng quát của (α) không chứa x nghĩa là mặt phẳng đó song song với trục Ox (vì phương trình của (α) không lệ thuộc vào x).*

Ví dụ 5

Lập phương trình tổng quát của các mặt phẳng tọa độ và các mặt phẳng đi qua điểm I(2; 6; –3) lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I và chứa trục Oz. Lập phương trình tổng quát của (P).

Giải



Mặt phẳng (xOy) nhận $\vec{e_3} = (0; 0; 1)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua gốc tọa độ O(0; 0; 0) nên có phương trình tổng quát là : z = 0.

Lập luận tương tự, các mặt phẳng (yOz) và (zOx) có phương trình tổng quát theo thứ tự là : x = 0 và y = 0.

- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm I và song song với mặt phẳng (xOy) nên có phương trình tổng quát dạng : (α) : z + D = 0

  Vì : I(2; 6; –3) ∈ (α) nên –3 + D = 0 ⇒ D = 3.

  Vậy phương trình tổng quát của (α) là z + 3 = 0.

- Gọi (β) là mặt phẳng đi qua điểm I và song song với mặt phẳng (yOz) nên có phương trình tổng quát dạng : (β) : x + D = 0

  Vì I(2; 6; –3) ∈ (β) nên 2 + D = 0 ⇒ D = 2.

  Vậy phương trình tổng quát của (β) là : x – 2 = 0.

- Gọi (γ) là mặt phẳng đi qua điểm I và song song với mặt phẳng (zOx) nên có phương trình tổng quát dạng : (γ) : y + D = 0

Vì I(2; 6; –3) ∈ (γ) nên 6 + D = 0 ⇒ D = – 6.

Vậy phương trình tổng quát của (γ) là y – 6 = 0.

- Mặt phẳng (P) có **hai vectơ chỉ phương** là $\vec{e_3} = (0; 0; 1)$ và $\overrightarrow{OI} = (2; 6; -3)$

nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ có tọa độ là :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right) = (-6; 2; 0).$$

Ta thay $\vec{n}$ bằng vectơ cùng phương là $\vec{n'} = (3; 1; 0)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) có dạng :

3x + y + D = 0, vì I(2; 6; -3) ∈ (P) nên 3.2 + 6 + D = 0 ⇒ D = –12.

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là : 3x + y – 12 = 0.

Vấn đề 2 : CHÙM MẶT PHẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến là một đường thẳng d. Tập hợp các mặt phẳng (γ) chứa d gọi là chùm mặt phẳng xác định bởi (α) và (β). Muốn viết phương trình của một mặt phẳng nào đó thuộc chùm ta cần :

- Lập phương trình của chùm (α, β) có dạng :

$$m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

trong đó : $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ theo thứ tự là phương trình tổng quát của (α) và (β).

- Dựa vào điều kiện cụ thể của bài toán ta tìm ra các hệ số m, n đối với một mặt phẳng (γ) nào đó của chùm. Chú ý rằng các hệ số m, n này xác định sai khác nhau một hệ số tỉ lệ khác 0. ($m^2 + n^2 > 0$).

- Thay các giá trị của m, n vừa tìm được vào phương trình của chùm mặt phẳng, ta sẽ lập được phương trình mặt phẳng thỏa mãn các điều kiện cho trước.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Trong không gian cho hai mặt phẳng có phương trình :

(α) : 2x + y – 3z + 1 = 0;   (β) : x – 3y + 2z – 1 = 0

Lập phương trình mặt phẳng (γ) đi qua giao tuyến (α) ∩ (β) và chứa điểm M(1; –1; 1).

Giải

Hai mặt phẳng (α) và (β) xác định chùm mặt phẳng có phương trình :

$$m(2x + y - 3z + 1) + n(x - 3y + 2z - 1) = 0 \quad (1)$$

$\Leftrightarrow (2m + n)x + (m - 3n)y - (3m - 2n)z + m - n = 0$ (1')

Mặt phẳng (γ) thuộc chùm và chứa điểm M(1; –1; 1) nên ta có từ (1) :

$-m + 5n = 0.$

Chọn $n = 1 \Rightarrow m = 5$ thay vào (1') ta có : $11x + 2y - 13z + 4 = 0$

Vậy mặt phẳng (γ) thuộc chùm (α, β) và đi qua M(1; –1; 1) có phương trình tổng quát là : $11x + 2y - 13z + 4 = 0$.

Ví dụ 2

Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng :

$(\alpha) : 2x - x = 0; \quad (\beta) : x + y - z + 5 = 0.$

và vuông góc với mặt phẳng (P) : $7x - y + 4z - 3 = 0$.

Giải

Mặt phẳng (Q) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) thuộc chùm

$m(2x - z) + n(x + y - z + 5) = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (2m + n)x + ny - (m + n)z + 5n = 0$ (2)

Mặt phẳng P cho trước có vectơ pháp tuyến $\vec{n_P} = (7; -1; 4)$.

Mặt phẳng (Q) cần tìm có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_Q} = (2m + n; n; -(m + n))$.

Điều kiện để $P \perp Q$ là $\vec{n_P} \perp \vec{n_Q}$ hay $\vec{n_P} . \vec{n_Q} = 0$

$\vec{n_P} . \vec{n_Q} = 0 \Leftrightarrow 14m + 7n - n - 4(m + n) = 0 \Leftrightarrow 10m + 2n = 0.$

Chọn $m = -1$, ta tính được $n = 5$. Thay các giá trị của m và n vào (2) ta được phương trình mặt phẳng (Q) cần tìm là : $3x + 5y - 4z + 25 = 0$.

Ví dụ 3

Xác định các tham số k và m để cho mặt phẳng $5x + ky + 4z + m = 0$ thuộc chùm mặt phẳng có phương trình :

$\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0.$

Giải

Chùm mặt phẳng đã cho có phương trình :

$(3\alpha + \beta)x - (7\alpha + 9\beta)y + (\alpha - 2\beta)z - 3\alpha + 5\beta = 0.$

Điều kiện để mặt phẳng $5x + ky + 4z + m = 0$ là mặt phẳng của chùm :

$$\frac{5}{3\alpha + \beta} = \frac{k}{-7\alpha - 9\beta} = \frac{4}{\alpha - 2\beta} = \frac{m}{-3\alpha + 5\beta}.$$

$$\frac{5}{3\alpha + \beta} = \frac{4}{\alpha - 2\beta} \Leftrightarrow 5(\alpha - 2\beta) = 4(3\alpha + \beta) \Leftrightarrow 5\alpha - 10\beta = 12\alpha + 4\beta$$

$$-7\alpha = 14\beta.$$

Chọn $\alpha = 2$, ta tính được $\beta = -1$. Thay các giá trị này của α và β vào biểu

thức sau : $\frac{5}{3\alpha + \beta} = \frac{k}{-7\alpha - 9\beta} = \frac{m}{-3\alpha - 5\beta} = 1$

$\Rightarrow k = -7\alpha - 9\beta$ và $m = -3\alpha - 5\beta \Rightarrow k = -5, m = -1.$

Ví dụ 4

Lập phương trình mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt phẳng

$$3x - y + 2z + 9 = 0, \quad x + z - 3 = 0.$$

a) Chứa điểm M(4; –2; –3).

b) Lần lượt song song với trục Ox; Oy; Oz.

Giải

Phương trình của chùm mặt phẳng xác định bởi hai mặt phẳng đã cho có dạng :

$$p(3x - y + 2z + 9) + q(x + z - 3) = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (3p + q)x - py + (2p + q)z + 9p - 3q = 0 \qquad (2)$$

a) Vì mặt phẳng của chùm chứa M(4; –2; –3) nên từ (1) ta có : $17p - 2q = 0$.

Chọn $p = 2$, ta tính được $q = 17$. Thay các giá trị này vào (2) ta được phương trình mặt phẳng cần tìm là : $23x - 2y + 21z - 33 = 0$.

b) • Mặt phẳng song song với trục Ox có phương trình tổng quát dạng

$By + Cz + D = 0$ (vắng mặt số hạng chứa x)

Từ (2) ta suy ra $3p + q = 0$. Chọn $p = -1$, ta tính được $q = 3$.

Thay các giá trị này của p và q vào (2) ta được phương trình của mặt phẳng của chùm và song song với trục Ox là : $y + z - 18 = 0$.

• Mặt phẳng song song với trục Oy có phương trình tổng quát dạng :

$Ax + Cz + D = 0$ (vắng mặt số hạng chứa y)

Từ (2) ta suy ra $p = 0$, q tùy ý. Thay các giá trị này vào (2) và rút gọn ta được phương trình tổng quát của mặt phẳng cần tìm là : $x + z - 3 = 0$.

• Mặt phẳng song song với trục Oz có phương trình tổng quát dạng :

$Ax + By + D = 0$ (vắng mặt số hạng chứa z).

Từ (2) ta suy ra $2p + q = 0$. Chọn $p = 1$, ta tính được $q = 2$. Thay các giá trị này vào (2) ta được phương trình tổng quát của mặt phẳng cần tìm là :

$$x - y + 15 = 0.$$

Vấn đề 3 : KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

• Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ được tính theo công thức :

$$d(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

• Muốn tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (α'), ta lấy một điểm M_0 thuộc mặt phẳng này (có tọa độ thỏa mãn phương trình mặt phẳng) và tính khoảng cách từ M_0 tới mặt phẳng kia.

Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì (α') có phương trình là $Ax + By + Cz + D' = 0$ với $D' \neq D$. Khi đó ta tính được :

$$d(\alpha, \alpha') = \frac{|-D' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Trong không gian hãy tính khoảng cách :

1. Từ điểm $A(7; 3; 4)$ đến mặt phẳng $6x - 3y + 2z - 13 = 0$.

2. Từ điểm $M(-1; 1; -2)$ đến mặt phẳng xác định bởi ba điểm không thẳng hàng : $P(1; -1; 1)$, $Q(-2; 1; 3)$, $R(4; -5; -2)$.

Giải

1. Áp dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta có : $$d(A, \alpha)) = \frac{|6.7 - 3.3 + 2.4 - 13|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{28}{7} = 4.$$

2. Trước hết ta cần lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (PQR).

Ta có : $\overrightarrow{PQ} = (-3; 2; 2)$; $\overrightarrow{PR} = (3; -4; -3)$.

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (PQR), ta có :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \right) = (2; -3; 6).$$

Ta có phương trình tổng quát của mặt phẳng (PQR) là :

$$2(x - 1) - 3(y + 1) + 6(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 6z - 11 = 0.$$

Do đó : $$d(M, (PQR)) = \frac{|2.(-1) - 3 + 6.(-2) - 11|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{28}{7} = 4.$$

Ví dụ 2

Trên trục Oy của hệ tọa độ Oxyz, hãy tìm điểm cách đều hai mặt phẳng có phương trình : $x + y + z + 1 = 0$ và $x - y + z - 5 = 0$.

Giải

Mỗi điểm M thuộc Oy có tọa độ dạng $M(0; y_0, 0)$. Khi đó khoảng cách từ M đến hai mặt phẳng đã cho là : $$\frac{|y_0 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|-y_0 - 5|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}.$$

Phương trình trên tương đương với hai phương trình sau :

$$y_0 + 1 = y_0 + 5 \text{ (vô nghiệm)}$$

$y_0 + 1 = -y_0 - 5 \Rightarrow y_0 = -3.$

Vậy điểm M có tọa độ là M(0; -3; 0).

Ví dụ 3

> Hãy tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song có phương trình .
>
> (P) : $4x + 3y - 5z - 8 = 0$; (Q) : $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

Giải

Chọn M(2; 0; 0) thuộc (P). Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) bằng khoảng cách từ M tới (Q).

$$d(M, (Q)) = \frac{|4.2 + 3.0 - 5.0 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2}} = \frac{20}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}.$$

Chú ý : *Có thể áp dụng công thức :* $d((P), (Q)) = \dfrac{|-D' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Trong đó P và Q lần lượt có phương trình :

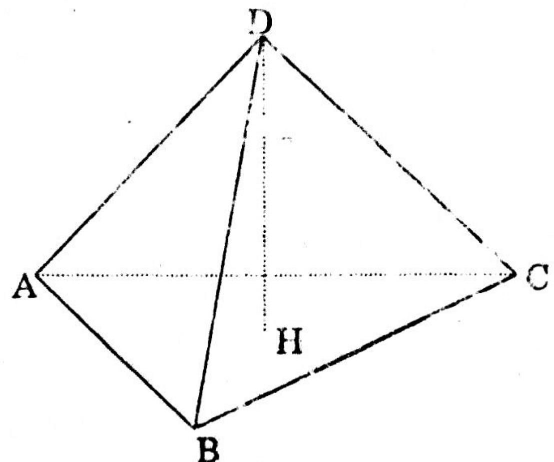
$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{và} \quad Ax + By + C + D' = 0.$$

Ta có : $d((P), (Q)) = \dfrac{|-12-8|}{\sqrt{4^2 + 3^2 +) - (5)^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}$.

Ví dụ 4

> Cho tứ diện ABCD với A(2; 3; 4), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D (-5; -4; 8). Tính độ dài đường cao DH của tứ diện.

Giải



Chiều cao DH của tứ diện bằng khoảng cách từ đỉnh D tới mặt phẳng (ABC) của tứ diện. Ta có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (2; -2; -3)\\ \overrightarrow{AC} = (4; 0; 6)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC). Ta có :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-12; -24; 8).$$

Chọn $\vec{n'}$ cùng phương với $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ta có : $\vec{n'} = (3; 6; -2)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A nhận $\vec{n'}$ làm

vectơ pháp tuyến :

$$3(x-2)+6(y-3)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x+6y-2z-22=0.$$

Khoảng cách $DH = d(D, (ABC)) = \dfrac{|3.(-5)+6(-4)-2(8)-22|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}} = \dfrac{77}{7} = 11.$

Vấn đề 4 : GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (α') bằng hoặc bù với góc tạo bởi hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ của (α) và (α') ($\varphi \le 90^0$).

Giả sử : (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và có $\vec{n} = (A; B; C)$.

(α') có phương trình $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ và có $\vec{n'} = (A'; B'; C')$.

Ta có $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}.\vec{n'}|}{|\vec{n}|.|\vec{n'}|} = \dfrac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$

$(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0.$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, hãy tính góc giữa mặt phẳng đi qua các điểm O, M, N với M(1; 1; 1), N(3; 2; 1) và mặt phẳng đi qua các điểm O, M, D với D(3; 1; 2).

Giải

Ta có : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM} = (1; 1; 1)\\ \overrightarrow{ON} = (3; 2; 1)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n_1} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} = \left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right).$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OMN) là $\vec{n_1} = (-1; 2; -1)$

Lập luận tương tự, ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OMD) là $\vec{n_2}$:

$$\vec{n_1} = \left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\right) = (1; 1; -2).$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (OMN) và (OMD) ta có :

$$|\cos\varphi| = \frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|} = \frac{|-1+2+2|}{\sqrt{1+4+1}.\sqrt{1+1+4}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\varphi = 60^0$.

Ví dụ 2

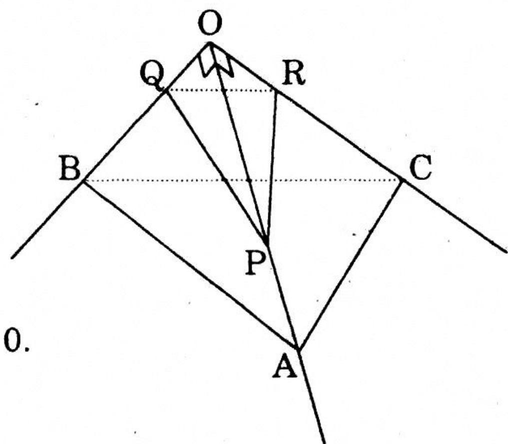
> Cho hình tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và có OA = a, OB = 2a, OC = 2a. Trên cạnh OA, OB, OC ta lần lượt lấy các điểm P, Q, R sao cho $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OC}$.
>
> Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (PQR).

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz, sao cho Ox, Oy, Oz lần lượt chứa các đỉnh của tứ diện là A, B, C. Ta có tọa độ các đỉnh của tứ diện là : O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; 2a; 0), C(0; 0; 2a).

Theo giả thiết, ta tính được tọa độ các điểm P, Q, R là :

$$P\left(\frac{2a}{3}; 0; 0\right), Q\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), R\left(0; 0; \frac{2a}{5}\right).$$



Mặt phẳng (ABC) có phương trình là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{2a} = 1 \Leftrightarrow 2x + y + z - 2a = 0$$

Mặt phẳng (PQR) có phương trình là :

$$\frac{x}{\frac{2a}{3}} + \frac{y}{\frac{a}{2}} + \frac{z}{\frac{2a}{5}} = 1 \Leftrightarrow 3x + 4y + 5z - 2a = 0.$$

Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; 1)$, mặt phẳng (PQR) có vectơ pháp tuyến $\vec{n'} = (3; 4; 5)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (PQR). Ta có :

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n'})| = \frac{|2.3 + 1.4 + 1.5|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{9+16+25}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \varphi = 30^0$.

Ví dụ 3

> Lập phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A(0; 0; 1), B(3; 0; 0) và tạo với mặt phẳng (xOy) góc 60^0.

Giải

Mặt phẳng cần tìm có dạng : Ax + By + Cz + D = 0

Vì mặt phẳng qua A(0; 0; 1) và B(3; 0; 0) nên :

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ 3A + D = 0 \end{cases} \Rightarrow D = -3A,\ C = 3A.$$

Mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; 3A)$.

Mặt khác, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (xOy) là : $\vec{e_3} = (0; 0; 1)$.

Theo giả thiết $\left|\cos(\vec{n}, \vec{e_3})\right| = \dfrac{3A}{\sqrt{10A^2 + B^2}.\sqrt{1}} = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$

Vậy : $36A^2 = 10A^2 + B^2 \Leftrightarrow 26A^2 = B^2 \Rightarrow B = \pm\sqrt{26}\,A$.

Do đó, phương trình mặt phẳng cần tìm là : $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$.

Như vậy ta có hai mặt phẳng thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Ví dụ 4

> Lập phương trình mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng có phương trình sau đây :
>
> $(\alpha) : 7x + y - 6 = 0; \qquad (\beta) : 3x + 5y - 4z + 1 = 0.$

Giải

Gọi $M_0(x_0; y_0; z_0)$ là một điểm thuộc mặt phẳng phân giác và như vậy M_0 phải cách đều (α) và (β), nghĩa là :

$$\frac{|7x_0 + y_0 - 6|}{\sqrt{7^2 + 1}} = \frac{|3x_0 + 5y_0 - 4z_0 + 1|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}}$$

Nếu $M_0(x; y; z)$ là một điểm thay đổi, ta cũng có điều kiện sau đây :

$$\frac{|7x + y - 6|}{\sqrt{50}} = \frac{|3x + 5y - 4z + 1|}{\sqrt{50}}.$$

Phương trình trên tương đương với hai phương trình sau đây là phương trình hai mặt phẳng phân giác cần tìm :

$$7x + y - 6 = 3x + 5y - 4z + 1 \Leftrightarrow 4x - 4y + 4z - 7 = 0.$$

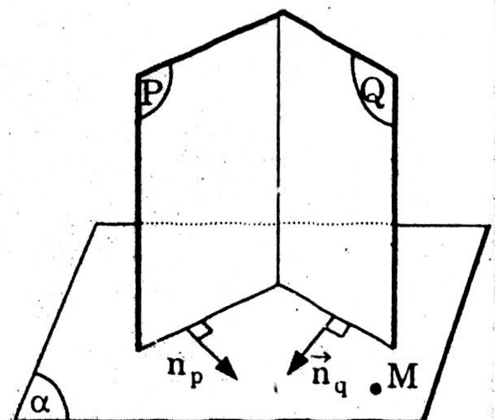
$$7x + y - 6 = -3x - 5y + 4z - 1 \Leftrightarrow 10x + 6y - 4z - 5 = 0.$$

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

> Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(3; -1; -5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) sau đây :
>
> $(P) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0; \qquad (Q) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0.$

Giải



Mặt phẳng (α) cần tìm có hai vectơ chỉ phương là hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) :

$\vec{n}_P = (3; -2; 2)$; $\vec{n}_Q = (5; -4; 3)$

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \right) = (2; 1; -2)$$

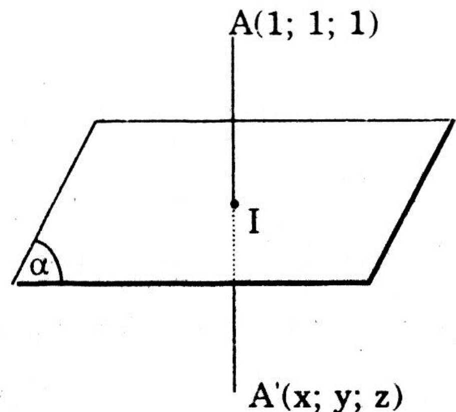
Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là :

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z-15=0.$$

Bài 2

> Trong không gian cho mặt phẳng (α) có phương trình $x + y - 2z - 6 = 0$.
> Hãy tìm điểm A' đối xứng với A(1; 1; 1) qua mặt phẳng (α).

Giải



Giả sử A' cần tìm có tọa độ (x; y; z). Ta có :

$\overrightarrow{AA'} = (x-1;\, y-1;\, z-1)$, vectơ $\overrightarrow{AA'}$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha$ của mặt phẳng (α).

Ta có : $\vec{n}_\alpha = (1; 1; -2)$. Vì $\overrightarrow{AA'} \,//\, \vec{n}$ nên ta có :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2} \qquad (1)$$

Mặt khác trung điểm I của đoạn $\overrightarrow{AA'}$ thuộc α nên :

$$\frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{2} + \frac{2(z+1)}{2} - 6 = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) ta suy ra $x = y$ và $z = -2x + 3$. Thay các giá trị này vào (2) ta tính được $x = 3$, $y = 3$, $z = -3$.

Vậy điểm A' có tọa độ là (3; 3; –3).

Bài 3

> Cho hình tứ diện ABCD, biết tọa độ các đỉnh A(2; 3; 1), B(4; 1; –2) C(6; 3; 7), D(–5; –4; 8). Tính độ dài đường cao của hình tứ diện xuất phát từ A.
>
> (ĐỀ THI VÀO ĐẠI HỌC DƯỢC HÀ NỘI – 1999)

Giải

Mặt phẳng (BCD) qua B(4; 1; 2) và có cặp vectơ chỉ phương là :

$$\overrightarrow{BC} = (2; 2; 9), \quad \overrightarrow{BD} = (-9; -5; 10)$$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (BCD), ta có :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 10 & -9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -9 & -5 \end{vmatrix} \right) = (65; -101; 8).$$

Mặt phẳng (BCD) có phương trình tổng quát là :

$$65(x-4) - 101(y-1) + 8(z+2) = 0 \Leftrightarrow 65x - 101y - 8z - 143 = 0$$

Đường cao của tứ diện xuất phát từ A có độ dài bằng khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) :

$$h = d(A, (BCD)) = \frac{|65.2 - 101.3 + 8.1 - 143|}{\sqrt{65^2 + 101^2 + 8^2}} = \frac{308}{3\sqrt{1610}}.$$

Bài 4

Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác Oxyz, cho điểm A(–1; 2; 3), các mặt phẳng (P) : $x - 2 = 0$ và (Q) : $y - z - 1 = 0$.

Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua A và vuông góc với hai mặt phẳng (P); (Q).

(ĐỀ THI VÀO ĐẠI HỌC LUẬT HÀ NỘI – 1999)

Giải

Các mặt phẳng (P) và (Q) có các vectơ pháp tuyến :

$$\vec{n}_P = (1; 0; 0),\quad \vec{n}_Q = (0; 1; -1).$$

Mặt phẳng (R) muốn vuông góc với (P) và (Q) thì phải nhận cặp vectơ chỉ phương là $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$. Gọi $\vec{n}_R$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (R), ta có :

$$\vec{n}_R = \vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0; 1; 1)$$

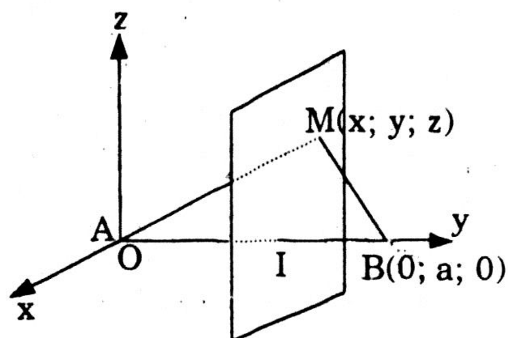
Mặt phẳng (R) đi qua A(–1; 2; 3) nhận $\vec{n}_R = (0; 1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến, nên có phương trình tổng quát là :

$$0(x + 1) + 1(y - 2) + 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow y + z - 5 = 0.$$

Bài 5

Trong không gian cho hai điểm phân biệt A, B. Hãy tìm tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k^2$ với k là một số thực.

Giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho O trùng với A, điểm B thuộc trục Oy. Giả sử AB = a và M(x; y; z). Các điểm A, B có tọa độ là : A(0; 0; 0), B(0; a; 0).

$$MA^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$MB^2 = x^2 + (y - a)^2 + z^2$$

Theo giả thiết : $MA^2 - MB^2 = k^2$, ta có :

$$x^2 + y^2 + z^2 - [x^2 + (y - a)^2 + z^2] = k^2 \Leftrightarrow 2ay = k^2 + a^2$$

$$y = \frac{k^2 + a^2}{2a} \quad (a \neq 0).$$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng song song với mặt phẳng(xOz), vuông góc với trục Oy (là đường thẳng chứa đoạn AB) tại điểm I sao cho :

$$AI = \frac{R^2 + a^2}{2a}.$$

Bài 6

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng lần lượt có phương trình : $2x - 2y + z - 3 = 0$, $x + 2y - 2z + 12 = 0$.

Hãy tìm trên trục Oz điểm cách đều hai mặt phẳng đó.

Giải

Mỗi điểm M thuộc Oz có tọa độ dạng $(0; 0; z_0)$. Khi đó khoảng cách từ M đến hai mặt phẳng là :

$$d_1 = \frac{|2.0 - 2.0 + z_0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|z_0 - 3|}{3}$$

$$d_2 = \frac{|1.0 - 2.0 + 2.z_0 + 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2z_0 + 12|}{3}$$

$$d_1 = d_2 \Leftrightarrow \frac{|z_0 - 3|}{3} = \frac{|-2z_0 + 12|}{3} \Leftrightarrow z_0 - 3 = \pm(-2x_0 + 12)$$

- $z_0 - 3 = -2z_0 + 12 \Rightarrow z_0 = 5$.
- $z_0 - 3 = 2z_0 - 12 \Rightarrow z_0 = 9$.

Vậy hai điểm cần tìm là $M_1(0; 0; 5)$ và $M_2(0; 0; 9)$.

Bài 7

Hãy tìm trong chùm mặt phẳng xác định bởi mặt phẳng :

$(\alpha) : 2x + y - 3z + 2 = 0$; $(\beta) : 5x - 5y - 4z + 3 = 0$.

Hai mặt phẳng P, Q vuông góc với nhau trong đó có một mặt phẳng đi qua điểm $A(4; -3; 1)$.

Giải

Chùm mặt phẳng xác định bởi hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình :

$$m(2x + y - 3z + 2) + n(5x - 5y - 4z + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m + 5n)x + (m + 5n)y - (3m + 4n)z + 2m + 3n = 0$$

Gọi (P) là mặt phẳng của chùm đi qua điểm A (4; −3; 1). Khi đó ta có :

$$(2.4 - 3 - 3.1 + 2)m + 5.4 + 5.(-3) - 4.1 + 3)n = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + 4n = 0.$$

Chọn $m = 1$, ta tính được $n = -1$. Thay các giá trị này vào phương trình của chùm, ta được phương trình của mặt phẳng P đi qua điểm A là :

$$-3x - 4y + z - 1 = 0 \quad \text{hay} \quad 3x + 4y - z + 1 = 0 \text{ (P)}.$$

Gọi (Q) là mặt phẳng của chùm và (Q) vuông góc với (P). Muốn (P) vuông góc với (Q) thì các vectơ pháp tuyến của chúng phải vuông góc với nhau.

Ta có : $\vec{n_P} . \vec{n_Q} = 0$; trong đó :

$$\vec{n_P} = (3; 4; -1), \quad \vec{n_Q} = (2m + 5n; m + 5n; -(3m + 4n)).$$

$\vec{n}_P . \vec{n}_Q = (2m + 5n).3 + (m + 5n) 4 - (3m + 4n).(-1) = 0$

$= 13m + 39n = 0.$

Chọn m = 3, ta tính được n = −1. Thay các giá trị này vào phương trình của chùm, ta được phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là :

$$x - 2y - 5z + 3 = 0.$$

Bài 8

Lập phương trình tổng quát của :

1. Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A(−2; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 5).

2. Mặt phẳng (β) đi qua điểm M(2; 3; 1) và song song với mặt phẳng (α) nói trên. Tìm giao điểm của mặt phẳng (β) này với các trục tọa độ.

3. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (Oxy). Hãy tính cosφ.

Giải

1. Mặt phẳng (α) cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Theo công thức lập phương trình của (α) theo đoạn chắn, ta có phương trình của (α) là :

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1 \text{ hay } 15x - 10y - 6z + 30 = 0.$$

2. Mặt phẳng (β) song song với (α) nên phương trình tổng quát của (β) có dạng : 15x − 10y − 6z + D = 0.

Vì M(2; 3; 1) thuộc (β) nên ta có :

$$15.2 - 10.3 - 6.1 + D = 0 \Leftrightarrow 30 - 30 - 6 + D = 0 \Leftrightarrow D = 6.$$

Vậy (β) có phương trình tổng quát là : 15x − 10y − 6z + 6 = 0

- Giao điểm M của mặt phẳng (β) với trục Ox có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 15x - 10y - 6z + 6 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{2}{5};0;0\right).$$

- Giao điểm N của mặt phẳng (β) với trục Oy có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 15x - 10y - 6z + 6 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow N(0, \frac{3}{5}; 0).$$

- Giao điểm P của mặt phẳng (β) với trục Oz có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 15x - 10y - 6z + 6 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0; 0; 1).$$

3. Mặt phẳng (Oxy) có phương trình tổng quát là : z = 0. Gọi φ là góc nhọn giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (Oxy), ta có vectơ pháp tuyến của (Oxy) là $\vec{n} = (0; 0; 1)$ và vectơ pháp tuyến của (α) là : $\vec{n_\alpha} = (15; -10; -6)$

$$|\cos\varphi| = \left|\cos\left(\vec{n}'; \vec{n_\alpha}\right)\right| = \frac{|0 + 0 + (-6)|}{\sqrt{15^2 + 10^2 + 6^2}.\sqrt{1}} = \frac{6}{19}.$$

Bài 9

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng có phương trình

(α) : 2x − my + 3z − 6 + m = 0;

(β) : (m + 3)x − 2y +(5m + 1)z − 10 = 0

Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó :

1. Song song với nhau. 2. Trùng nhau. 3. Cắt nhau.

Giải

1. Hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau khi và chỉ khi :

$$\frac{2}{m+3} = \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} \neq \frac{-6+m}{10} \quad (1)$$

Xét : $\frac{2}{m+3} = \frac{m}{2} \Rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0$

$$m = \frac{-3 \mp 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -4 \\ m_2 = 1 \end{cases}.$$

Xét $\frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} \Rightarrow 5m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm 11}{10}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_3 = -\frac{12}{10} \\ m_4 = 1 \end{cases}.$$

Lấy giá trị m = 1 thay vào tỷ số cuối cùng, ta có : $\frac{-6+m)}{-10} = \frac{-6+1}{10} = 1$.

Như vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện (1) nêu trên. Vậy hai mặt phẳng (α), (β) không thể song song với nhau.

2. Với m = 1, ta có : $\frac{2}{m+2} = \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} = \frac{-6+m}{-10} = \frac{1}{2}$.

Vậy nếu m = 1 thì hai mặt phẳng (α), (β) trùng nhau.

3. Từ các tính toán trên, ta suy ra khi m ≠ 1 thì hai mặt phẳng đó cắt nhau.

Bài 10

Trong không gian Oxyz, hãy tìm tập hợp các điểm cách đều hai điểm phân biệt $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$ cho trước. Chứng tỏ rằng tập hợp này là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua trung điểm của đoạn AB.

Áp dụng : Tìm tập hợp các điểm cách đều hai điểm A(1; 2; 0), B(5; 6; −2).

Giải

Gọi M(x; y; z) là điểm cách đều hai điểm A, B ta có : $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}| \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2}$$

Bình phương hai vế và rút gọn ta có :

$$2(b_1-a_1)x + 2(b_2-a_2)y + 2(b_3-a_3)z + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b_1-a_1)x + (b_2-a_2)y + (b_3-a_3)z + \frac{a_1^2-b_1^2}{2} + \frac{a_2^2-b_2^2}{2} + \frac{a_3^2-b_3^2}{2} = 0 \quad (1)$$

Ta nhận thấy phương trình (1) biểu thị cho một mặt phẳng vì đó là một phương trình bậc nhất đối với x, y, z trong đó các hệ số $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$ không đồng thời bằng 0 vì hai điểm A, B phân biệt. Mặt khác, mặt phẳng này có vectơ pháp tuyến : $\vec{n} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3) = \overrightarrow{AB}$.

Thay $x = \frac{a_1+b_1}{2}$, $y = \frac{a_2+b_2}{2}$, $z = \frac{a_3+b_3}{2}$ vào phương trình (1), ta thấy phương trình đó thỏa mãn. Vậy mặt phẳng này đi qua trung điểm của đoạn AB và vuông góc với AB nên được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Áp dụng : Gọi M là điểm cách đều A và B và I là trung điểm của đoạn AB.

Giả sử M(x; y; z), ta có $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (4; 4; -2)$ và tọa độ điểm I là $\left(\frac{1+5}{2}; \frac{2+6}{2}; \frac{0-2}{2}\right) = (3; 4; -1)$.

$$\overrightarrow{IM} = (x-3; y-4; z+1)$$

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 4(x-3) + 4(y-4) - 2(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 2z - 30 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z - 15 = 0$$

là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Mặt phẳng này là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B cho trước.

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Trong không gian cho ba điểm : A(3; 4; 0), B(1; 5; 3), C(2; –3; 1).

a) Chứng tỏ ba điểm A, B, C không thẳng hàng và lập phương trình tổng quát của mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C đó.

b) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với BC.

ĐS : a) $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 3)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; -7; 1)$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC) là :

$$22x - y + 15z - 62 = 0.$$

b) Phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là : $x - 8y + 2z + 29 = 0$.

02. Trong không gian cho hai điểm : A(–3; 2; 5) và B(1; –2; 3).

a) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

b) Tính cosin của các góc hợp bởi mặt phẳng trung trực đã nêu ở trên và các mặt phẳng tọa độ.

ĐS : a) Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có phương trình tổng quát là :

$$2x - 2y - z + 6 = 0.$$

b) Gọi α, β, γ là các góc nhọn hợp bởi mặt phẳng trung trực lần lượt với các mặt phẳng Oxy, Oyz, Ozx. Ta có : $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\beta = \frac{2}{3}$; $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

03. Cho chùm mặt phẳng có phương trình :

$$m(2x - 3y + z - 5) + n(x - 2y - z - 7) = 0.$$

a) Mặt phẳng $5x - 9y - 2z + 12 = 0$ có phải là một mặt phẳng thuộc chùm hay không ?

b) Lập phương trình mặt phẳng của chùm đi qua gốc tọa độ.

ĐS : a) Mặt phẳng đã cho không phải là một mặt phẳng của chùm.

b) Phương trình mặt phẳng cần tìm là : $9x - 11y + 12x = 0$.

04. Lập phương trình mặt phẳng :

a) Chứa giao tuyến của hai mặt phẳng :

$2x - 7y + 4z - 3 = 0$, $3x - 5y + 4z + 11 = 0$ và đi qua điểm M(–2; 1; 3).

b) Chứa giao tuyến hai mặt phẳng $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ và vuông góc với mặt phẳng $x - 2y - z + 3 = 0$.

ĐS : a) $15x - 47y + 28z - 7 = 0$. b) $3x + y + 2z - 3 = 0$.

05. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M(5; 2; –3) và song song với mặt phẳng $2x - y + 4z - 1 = 0$. Hãy xét xem các điểm P(1; 2; –1), Q(4; 5; 1) và R(–6; 2; -3) có thuộc mặt phẳng (α) hay không ?

ĐS : $2x - y + 4z + 4 = 0$: (α).

$P \in (\alpha)$, $Q \notin (\alpha)$, $R \notin (\alpha)$.

06. Tìm góc nhọn giữa hai cặp mặt phẳng sau đây :

a) $2x - y - 2z - 9 = 0$ và $x - y - 6 = 0$ (P và Q).

b) $8x - 4y - 8x + 1 = 0$ và $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$ (R và S).

ĐS : a) $\widehat{(P, Q)} = \frac{\pi}{4}$. b) $\widehat{(R, S)} = \frac{\pi}{4}$.

07. Cho hai điểm A(1; 3; –4), B(–1; 2; 2). Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

ĐS : $4x + 2y - 12x - 17 = 0$.

08. Lập phương trình tổng quát của các mặt phẳng :

a) Chứa trục Ox và điểm M(4; –1; 2).

b) Chứa trục Oy và điểm N(1; 4; –3).

c) Chứa trục Oz và điểm P(3; –4; 7).

ĐS : a) $2y + z = 0$. b) $3x + z = 0$. c) $4x + 3y = 0$.

09. Tìm tập hợp các điểm cách đều các cặp mặt phẳng song song sau đây :

a) $4x - y - 2z - 3 = 0$ và $4x - y - 2z - 5 = 0$.

b) $3x + 2y - z + 3 = 0$ và $3x + 2y - z - 1 = 0$.

ĐS : a) $4x - y - 2z - 4 = 0$ b) $3x + 2y - z + 1 = 0$.

10. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng cắt nhau có phương trình lần lượt là : $(\alpha) : 2x + y - 2z - 1 = 0$, $(\beta) : 6x - 3y - 2z - 2 = 0$.

ĐS : Là hai mặt phẳng sau đây :

$$14x + 7y - 14z - 7 = \pm(18x - 9y + 6z - 6)$$

Hai mặt phẳng cần tìm là :

$$-4x + 16y - 20z - 1 = 0; \quad 32x - 2y - 8z - 13 = 0.$$

11. Tìm khoảng cách từ :

a) Điểm A(–2; –4; 3) đến mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 2z - 3 = 0$.

b) Điểm B(2; –1; –1) đến mặt phẳng $(\beta) : 16x - 12y - 15z - 4 = 0$.

c) Điểm C(4; 2; –2) đến mặt phẳng $(\gamma) : 12y + 5z + 5 = 0$.

ĐS : a) $d(A, (\alpha)) = 1$; b) $d(B, (\beta)) = \frac{11}{5}$; c) $d(C, (\gamma)) = 3$.

12. Tìm tập hợp các điểm có khoảng cách bằng 4 đến mặt phẳng :

$$2x + 3y - 6z - 7 = 0$$

ĐS : Là hai mặt phẳng có phương trình :
- $2x + 3y - 6z - 35 = 0$
- $2x + 3y - 6z + 21 = 0$

13. Lập phương trình mặt phẳng của chùm mặt phẳng có phương trình :

$$m(3x - 4y + z + 6) + n(2x - 3y + z + 2) = 0$$

cách đều hai điểm A(3; –4; –6), B(1; 2; 2).

ĐS : $x - 2y + z - 2 = 0$.

14. Lập phương trình mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2)

$$(\alpha_1) : 3x - y + 2z + 9 = 0; \quad (\alpha_2) : x + y - 3 = 0$$

a) Song song với trục Ox.

b) Song song với trục Oy.

c) Song song với trục Oz.

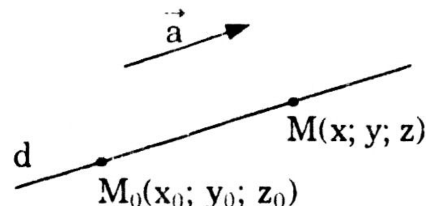
ĐS : a) $y + z - 18 = 0$; b) $x + z - 3 = 0$; c) $x - y + 15 = 0$.

Chuyên đề 9 : ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG d

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vectơ chỉ phương ($\vec{a} \neq \vec{0}$)



$M(x; y; z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = ta_1 \\ y - y_0 = ta_2 \\ z - z_0 = ta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình (1) gọi là phương trình tham số của đường thẳng d.

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Từ (1) khử t ta có : $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$ (2)

Phương trình (2) gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng với quy ước nếu mẫu số bằng 0 (ví dụ $a_1 = 0$ thì $x - x_0 = 0$, nếu $a_3 = 0$ thì $z - z_0 = 0$...).

❑ **Chú ý :** *Do cách chọn điểm đi qua và vectơ chỉ phương mà một đường thẳng có thể có nhiều phương trình tham số và phương trình chính tắc khác nhau.*

3. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian ta có thể xem đường thẳng d là giao của hai mặt phẳng (α) và (α') nào đó. Giả sử (α) và (α') lần lượt có phương trình là :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{và} \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

thì $d = (\alpha) \cap (\alpha')$ có phương trình tổng quát là :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D' = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{với } A : B : C \neq A' : B' : C'.$$

4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Giả sử đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, đường thẳng d' đi qua điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có các trường hợp :

a) d và d' nằm trong một mặt phẳng $\Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}).\overrightarrow{M_0M'_0} = 0$.

b) d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}).\overrightarrow{M_0M'_0} = 0$ và $a_1 : a_2 : a_3 \neq b_1 : b_2 : b_3$.

c) $d \,//\, d' \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3 \neq (x'_0 - x_0) : (y'_0 - y_0) : (z'_0 - z_0)$.

d) $d \equiv d' \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3 = (x'_0 - x_0) : (y'_0 - y_0) : (z'_0 - z_0)$.

e) d chéo d' $\Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}).\overrightarrow{M_0M'_0} \neq 0$.

5. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Gọi φ là góc giữa d và d', ta có :

$$|\cos\varphi| = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$d \perp d' \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$

6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_2; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$.

a) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) $\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{a} \neq 0$ hay $\vec{a}$ và $\vec{n}$ không vuông góc hay : d cắt (α) $\Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$.

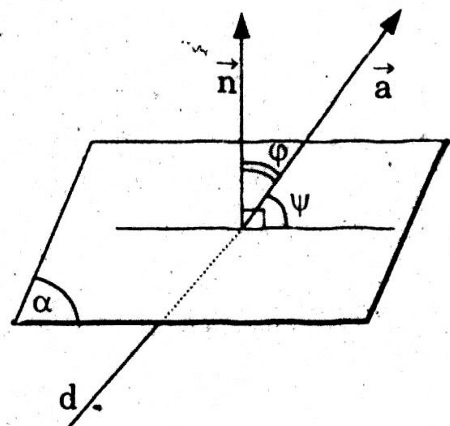
b) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) $\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{a} = 0$ và điểm $M \notin (\alpha)$ hay : $d \,//\, (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$.

c) Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (α) $\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{a} = 0$ và $M \in (\alpha)$ hay : $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$.

d) Đặc biệt, đường thẳng d vuông góc với (α) $\Leftrightarrow \vec{n}$ và $\vec{a}$ cùng phương hay : $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = A : B : C$.

e) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Giả sử đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$.



Gọi ψ là góc giữa d và (α), còn φ là góc giữa d và đường thẳng chứa vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ của (α) thì $\psi + \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Do đó : $\sin\psi = \cos\varphi$ với $0^0 \leq \varphi \leq 90^0$.

Vậy : $\sin\psi = \dfrac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$.

Từ công thức trên ta suy ra $d \,//\, (\alpha)$ hoặc $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$.

7. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

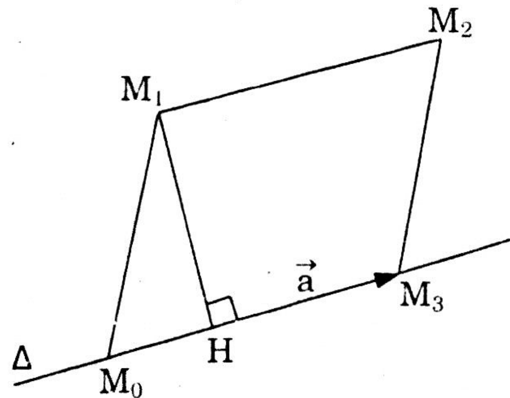
Cho đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và một điểm M_1 trong không gian. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M_1 trên đường thẳng Δ (mặt phẳng đi qua M_1 và vuông góc với Δ, cắt Δ tại H).

Ta có : $M_1H = d(M_1, \Delta)$

Giả sử M_1 không thuộc Δ và $\overrightarrow{M_0M_3} = \vec{a}$.

Khi đó hình bình hành $M_0M_1M_2M_3$ với $\overrightarrow{M_0M_3} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{a}$ sẽ có diện tích

$$S = \left|\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \vec{a}\right|.$$



Do đó : $M_1H = \dfrac{S}{M_0M_3} = \dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|} = d(M_1, \Delta).$

Công thức trên vẫn đúng cho trường hợp $M_1 \in \Delta$.

❑ **Chú ý :** *Ta có thể lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua M_1 nhận $\vec{a}$ làm vectơ pháp tuyến và tìm được giao điểm $H = (\alpha) \cap \Delta$.*

Ta có : $d(M_1, \Delta) = |\overrightarrow{M_1H}|$.

8. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

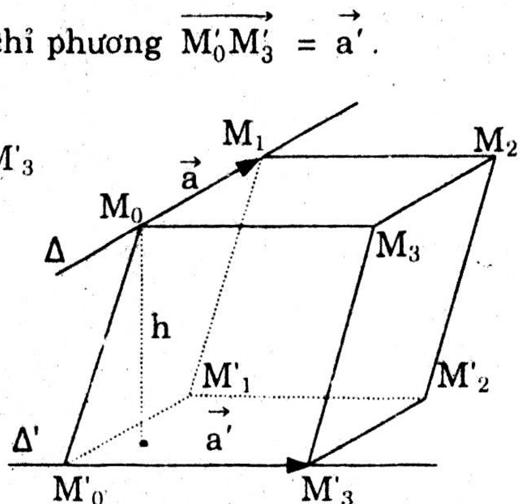
Cho hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau. Đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{a}$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm M'_0 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{M'_0M'_3} = \vec{a}'$.

Ta hãy tìm khoảng cách giữa Δ và Δ'.

Ta dựng hình hộp : $M_0M_1M_2M_3M'_0M'_1M'_2M'_3$ (có các cạnh $M_0M'_0 // M_1M'_1 // M_3M'_3$).

Khi đó khoảng cách giữa Δ và Δ' bằng khoảng cách giữa hai đáy của hình hộp nói trên, tức là chiều cao của hình hộp.



Gọi V là thể tích hình hộp, $S_{M_0M_1M_2M_3}$ là diện tích đáy của hình hộp, d(Δ, Δ') là khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' thì :

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{V}{S_{M_0M_1M_2M_3}} = \frac{|(\vec{a} \wedge \vec{a}').\overrightarrow{M_0M'_0}|}{|\vec{a} \wedge \vec{a}'|}.$$

❑ **Chú thích :** Muốn tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta còn có thể :

- Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa đường này và song song với đường kia.
- Tính khoảng cách giữa đường kia tới mặt phẳng (α).

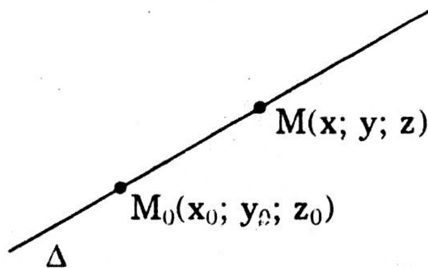
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

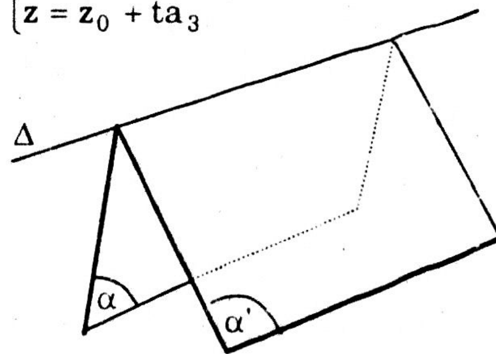
Vấn đề 1 : LẬP PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. PHƯƠNG PHÁP

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vectơ chỉ phương : $M(x; y; z) \in \Delta$.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = ta_1 \\ y - y_0 = ta_2 \\ z - z_0 = ta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 = ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (1)$$





Phương trình (1) là hệ 3 phương trình và được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ. Nếu cho biết phương trình tham số (1) của một đường thẳng nào đó, ta dễ dàng thấy rằng đường thẳng đó đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vectơ chỉ phương.

Từ phương trình (1) nếu khử t bằng cách viết : $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{y - y_0}{a_3}$

ta được phương trình chính tắc của đường thẳng.

- Đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình : $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$

$(\alpha') : A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow (x; y; z)$ là nghiệm hệ phương trình :

$$\Delta : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0 \end{cases} \text{ với } A : B : C \neq A' : B' : C'.$$

❑ **Nhận xét :** Ta thấy rằng phương trình chính tắc là một dạng đặc biệt của phương trình tổng quát của đường thẳng. Mặt khác từ phương trình tham số của đường thẳng nếu ta khử tham số t thì được phương trình tổng

quát của đường thẳng. Ngược lại, ta cũng có thể biến đổi đưa dạng tổng quát của đường thẳng về dạng tham số. Các bài toán này sẽ được xét thông qua một số ví dụ nêu sau đây.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc và phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(2; 0; -3)$ và nhận $\vec{a} = (2; -3; 1)$ làm vectơ chỉ phương.

Giải

Phương trình tham số của đường thẳng d là :

$$M(x; y; z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2t \\ y - o = -3t \\ y + 3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của đường thẳng d là : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{1}$

Phương trình tổng quát của đường thẳng d là :

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} \\ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{z+3}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 6 = 0 \\ x - 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

Chú ý : *Do cách khử t khác nhau, ta được các cách biểu thị khác nhau của phương trình tổng quát là các hệ hai phương trình bậc nhất khác nhau.*

Ví dụ 2

Lập phương trình chính tắc và tổng quát của đường thẳng Δ đi qua hai điểm A(–3; 4; 1) và B(2; 0; 5).

Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm A(–3; 4; 1) nhận $\overrightarrow{AB} = (5; -4; 4)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình chính tắc là : $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-4}{-4} = \dfrac{z-1}{4}$.

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là :

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-4}{-4} \\ \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{z-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5y - 8 = 0 \\ 4x - 5z - 7 = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 3

Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm A(2; 0; –3) và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình :

$$2x + y + 5z - 4 = 0.$$

Giải

Đường thẳng d đi qua điểm A(2; 0; −3) và nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 5)$ của mặt phẳng (α) làm vectơ chỉ phương (vì d ⊥ (α)) nên có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = 2 + 2t & (1) \\ y = t & (2) \\ z = -3 + 5t & (3) \end{cases}$

Lấy t = y, từ (2) thay vào (1) và (3) ta có phương trình tổng quát của d :

$$\begin{cases} x = 2 + 2y \\ z = -3 + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ 5y - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 4

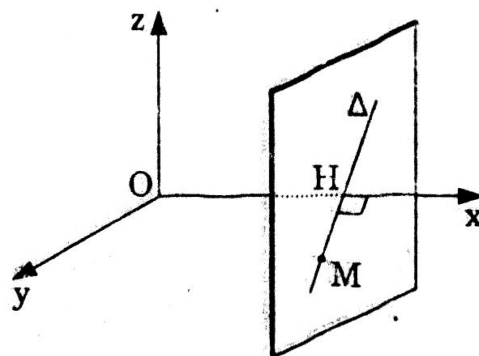
> Lập phương trình tham số và tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm M(3; 2; −1) cắt trục Ox, đồng thời vuông góc với trục Ox.

Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm M(3; 2; −1) vuông góc và cắt trục Ox tại H nên ta có H(3; 0; 0). Do đó Δ có vectơ chỉ phương là : $\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{MH} = (0; -2, 1)$.

Vậy Δ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = 3 & (1) \\ y = 2 - 2t & (2) \\ z = -1 + t & (3) \end{cases}.$$



Từ (3) ta có t = z + 1. Thay giá trị này của t vào (1) và (2) ta được phương trình tổng quát của Δ là :

$$\Delta : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - 2(z + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 5

> Lập phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M(−2; 6; −3) và
>
> a) Song song với đường thẳng Δ có phương trình : $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$.
>
> b) Lần lượt song song với các trục Ox, Oy, Oz.

Giải

a) Muốn d // Δ phải có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = (5; 2; -1)$, do đó d có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 6 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm M(−2; 6; −3) và song song với trục Ox nên nhận vectơ $\vec{e_1} = (1; 0; 0)$ làm vectơ chỉ phương. Ta suy ra phương trình tham số của d là : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 6 \\ z = -3 \end{cases}$

• Đường thẳng d song song với trục Oy nên nhận vectơ $\vec{e_2} = (0; 1; 0)$ làm vectơ chỉ phương.

Khi đó d có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 + t \\ z = -3 \end{cases}$

• Muốn d song song với trục Oz thì d phải nhận vectơ $\vec{e_3} = (0; 0; 1)$ làm vectơ chỉ phương, khi đó d có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \\ z = -3 + t \end{cases}$

Ví dụ 6

Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d :

1. Đi qua hai điểm A(1; 0; −3), B(3; −1; 0).

2. Đi qua điểm M(2, 3, −5) và song song với đường thẳng Δ có phương trình : $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

Giải

1. Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3)$ nên có phương trình tham số là : $\begin{cases} x + 1 + 2t & (1) \\ y = -t & (2) \\ z = -3 + 3t & (3) \end{cases}$

Từ (2) ta có t = −y. Thay giá trị này của t vào (1) và (3) ta được phương trình tổng quát của đường thẳng AB :

$$\begin{cases} x = 1 - 2y \\ z = -3 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

2. Trước hết ta cần tìm phương trình tham số của đường thẳng Δ cho trước :

$$\Delta : \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 & (4) \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 & (5) \end{cases}$$

Đặt : x = t, từ (4) và (5), ta có : $\left.\begin{matrix} 3t - y + 2z - 7 = 0 & (6) \\ t + 3y - 2z + 3 = 0 & (7) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 4t + 2y - 4 = 0 \\ y = -2t + 2 \end{matrix}$

Thay giá trị của y vào (6), ta có :

$$3t + 2t - 2 + 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2}.$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ cho trước là :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 2 \\ z = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2} \end{cases}$$

Do đó đường thẳng d // Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a_d} = \left(1; -2; -\frac{5}{2}\right)$. Ta có thể lấy $\vec{a'}$ làm vectơ chỉ phương của d nên $\vec{a'} = (2; -4; -5)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là :

$$\begin{cases} x = 2 = 2t' \\ y = 3 - 4t' \\ z = -5 - 5t' \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}.$$

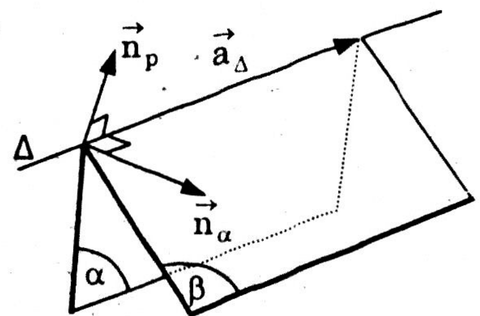
Do đó đường thẳng d có phương trình tổng quát là :

$$\begin{cases} -4(x-2) = 2(y-3) \\ -5(x-2) = 2(z+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases}$$

Chú thích : *Người ta có thể tìm vectơ chỉ phương $\vec{a_\Delta}$ của đường thẳng Δ cho trước bằng cách khác. Ta xem Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) :*

(α) : $3x - y + 2z - 7 = 0 \Rightarrow \vec{n_\alpha} = (3; -1; 2)$

(β) : $x + 3y - 2z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n_\beta} = (1; 3; -2)$.



Khi đó vectơ $\vec{a_\Delta} = \vec{n_\alpha} \wedge \vec{n_\beta}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ = (α) ∩ (β).

Do đó :

$$\vec{a_\Delta} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-4; 8; 10).$$

Ta có thể lấy $\vec{a'_\Delta} = (2; -4; -5)$ làm vectơ chỉ phương của Δ.

Ví dụ 7

Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm A(3; −1; −4), cắt trục Oy và song song với mặt phẳng : 2x + y = 0.

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng qua A(3; −1; −4) và song song với mặt phẳng 2x + y = 0.

Do đó (α) có phương trình là : $2x + y + D = 0$

$A \in (\alpha) \Rightarrow 6 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5$.

Vậy (α) có phương trình tổng quát là $2x + y - 5 = 0$.

Gọi (β) là mặt phẳng qua A và chứa Oy. Do đó (β) có hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{OA} = (3; -1; -4)$; $\vec{e_2} = (0; 1; 0)$

Ta suy ra vectơ pháp tuyến $\vec{n_\beta}$ của (β) có tọa độ là :

$$\vec{n_\beta} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4; 0; 3).$$

$A(3; -1; -4) \in (\beta)$ nên phương trình tổng quát của (β) là :

$$4(x - 3) + 0(y + 1) - 3(z - 4) = 0 \text{ hay } 4x - 3z = 0.$$

Hai mặt phẳng (α) và (β) có chung điểm A nên có giao tuyến Δ đi qua A, mặt khác $\Delta \subset (\alpha)$ // mặt phẳng $2x + y = 0$ nên Δ song song với mặt phẳng $2x + y = 0$. Hơn nữa $\Delta \subset (\beta)$ mà (β) chứa Oy nên trong mặt phẳng (β) hai đường thẳng Δ và Oy cắt nhau vì chúng không cùng phương.

Vậy ta có phương trình tổng quát của $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$ là : $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 4x - 3z = 0 \end{cases}$

Vấn đề 2 : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Giả sử đường thẳng d được cho bởi phương trình tham số

(d) : $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$ và mặt phẳng (α) được cho bởi phương trình tổng quát

(α) : $Ax + By + Cz + D = 0$.

Số giao điểm của d và (α) chính là số nghiệm t của phương trình :

$$A(x_0 + ta_1) + B(y_0 - ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0 \quad (1)$$

- Nếu phương trình (1) vô nghiệm ⇔ d// (α).
- Nếu phương trình (1) có 1 nghiệm t_M ⇔ d cắt (α) tại điểm M có tọa độ

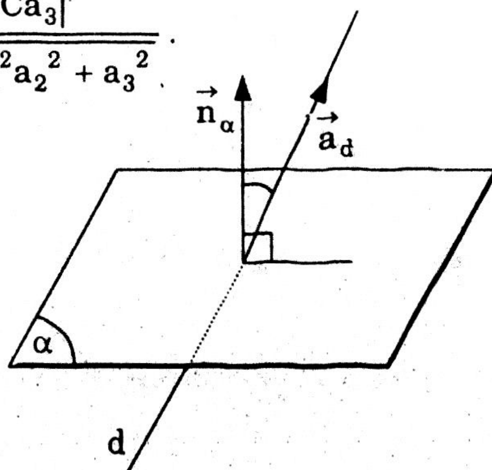
$$d \cap (\alpha) = M(x_M; y_M; z_M) \Rightarrow \begin{cases} x_M = x_0 + t_M a_1 \\ y_M = y_0 + t_M a_2 \\ z_M = z_0 + t_M a_3 \end{cases}.$$

- Nếu phương trình (1) có vô số nghiệm ⇔ $d \subset (\alpha)$.

2. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) được suy ra từ góc giữa vectơ chỉ phương $\vec{a_d}$ của d và vectơ pháp tuyến $\vec{n_\alpha}$ của (α) :

$$\sin(d, \alpha) = \left|\cos(\vec{a}_\alpha, \vec{n}_\alpha)\right| = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a_1^2 a_2^2 + a_3^2}}.$$

$d \perp (\alpha) \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0.$



Chú thích : *Nếu đường thẳng d được cho bởi phương trình tổng quát :*

$$d : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

và (α) được cho bởi phương trình tổng quát :

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$$

thì muốn tìm giao điểm d ∩ (α) ta giải hệ phương trình gồm 3 phương trình và 4 ẩn A, B, C, D (vì 4 ẩn này xác định sai khác một hệ số tỉ lệ nên 4 ẩn này tương đương với 3 ẩn. Giả sử A ≠ 0, ta cần tìm $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$, còn $\frac{A}{A} = 1$*).*

Mặt khác có thể chuyển phương trình đường thẳng d về dạng tham số và sau đó thực hiện các bước làm như trên.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Xét vị trí tương đối của mặt phẳng d và mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau :

1. $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$ và $(\alpha) : 3x + 2y + z - 1 = 0$.

2. $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $(\alpha) : x + 3y + z + 1 = 0$.

3. $d : \begin{cases} x = 1 + v \\ y = 1 + 2v \\ z = 2 - 3v \end{cases}$ và $(\alpha) : x + y + z - 4 = 0$.

Giải

1. Ta chuyển phương trình của d về dạng tham số : $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 4t' \end{cases}$.

Thay giá trị của x, y, z vào phương trình mặt phẳng (α), ta có :

$$3(1 + t') + 2(-1 - 2t') + 4t' - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t' = 0 \Leftrightarrow t' = 0.$$

Vậy d cắt (α) tại điểm M : $\begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = -1 \\ z_M = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; -1; 0).$

2. Xét phương trình : $(1 + t) + 3(2 - t) + (1 + 2t) + 1 = 0$ (1)

$0.t + 9 = 0$: (1) vô nghiệm.

Vậy $d \parallel (\alpha)$.

3. Xét phương trình : $(1 + v) + (1 + 2v) + (2 - 3v) - 4 = 0$ (2)

$0.v = 0$: (2) có vô số nghiệm

$\forall v \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của (2).

Vậy $d \subset (\alpha)$.

Ví dụ 2

Cho mặt phẳng (P) có phương trình : $2x + y + z - 1 = 0$

và đường thẳng d có phương trình : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$.

a) Tìm giao điểm M của d và (P).

b) Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và nằm trong (P).

Giải

a) Ta có phương trình tham số của đường thẳng d : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$

Thay các giá trị của x, y, z vào phương trình của mặt phẳng (P) ta có :

$$2(1 + 2t) + t + (-2 - 3t) - 1 = 0$$

$$2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vậy d cắt mặt phẳng (P) tại M : $\begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = \dfrac{1}{2} \\ z_M = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(2; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{2}\right)$

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với đường thẳng d. Dựa vào phương trình tham số của d, ta biết d có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (2; 1; -3)$.

Mặt phẳng (α) nhận $\vec{v}$ làm vectơ pháp tuyến và (α) qua $M\left(2; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{2}\right)$ nên có phương trình : $2(x - 2) + 1\left(y - \dfrac{1}{2}\right) - 3\left(z + \dfrac{7}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y - 6z - 26 = 0.$$

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình : $2x + y - 3z - 13 = 0$

Đường thẳng Δ là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (P) nên có phương trình : $\Delta : \begin{cases} 2x + y - 3z - 13 = 0 & (\alpha) \\ 2x + y + z - 1 = 0 & (\beta) \end{cases}$

Đường thẳng Δ nằm trong (α) mà $(\alpha) \perp d$ nên $\Delta \perp d$.

Mặt khác vì $\Delta = (\alpha) \cap (P)$ nên $\Delta \subset (P)$.

Ví dụ 3

Cho đường thẳng d có phương trình : $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = z - 1$ và mặt phẳng (α) có phương trình : $x + 2y + 3z - 15 = 0$.

a) Tìm giao điểm của d cắt (α).

b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên mặt phẳng (α).

Giải

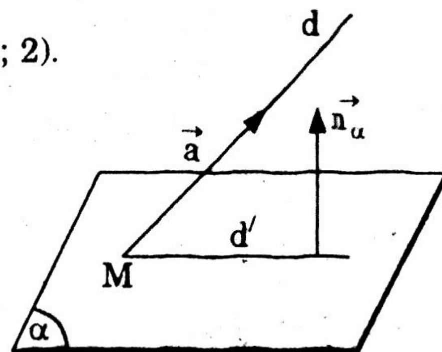
a) Đường thẳng d có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Thay các giá trị của x, y, z vào phương trình mặt phẳng (α) ta có :

$$(2 + 3t) + 2(-2 + 4t) + 3(1 + t) - 15 = 0$$

$$14t - 14 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Gọi $M = d \cap (\alpha)$. Ta có M : $\begin{cases} x_M = 5 \\ y_M = 2 \\ z_M = 2 \end{cases} \Rightarrow M(5; 2; 2)$.



b) Mặt phẳng (d, d') nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; 2; 3)$ của mặt phẳng (α) và vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = (3; 4; 1)$ của đường thẳng d làm cặp vectơ chỉ phương.

Gọi $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (d, d').

Ta có : $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-10; 8; -2)$

Chọn $\vec{n} = (5; -4; 1)$ cùng phương với $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (d, d'). Ta có phương trình của mặt phẳng (d; d') là :

$$5(x - 5) - 4(y - 2) + 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y + z - 19 = 0.$$

Ta suy ra hình chiếu d' của d trên (α) có phương trình là :

$$\begin{cases} 5x - 4y + z - 19 = 0 \\ x + 2y + 3z - 15 = 0 \end{cases}$$

Chú thích : *Có thể chuyển phương trình của d thành phương trình tổng quát như sau :*

$$\begin{cases}4(x-2)=3(y+2)\\(x-2)=3(z-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-3y-14=0\\x-3z+1=0\end{cases}.$$

Phương trình mặt phẳng (d, d') là một phương trình mặt phẳng thuộc chùm mặt phẳng có dang : m(4x − 3y − 14) + n(x − 3z + 1) = 0.

Ta cần xác định m và n sao cho vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (d, d') vuông góc với $\vec{n}_\alpha$. *Sau đó ta lập được phương trình đường thẳng d' cần tìm.*

Ví dụ 4

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) lần lượt có phương trình :

$$(d): \frac{x}{2}+\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}; \qquad (\alpha): x+y-2z+7=0.$$

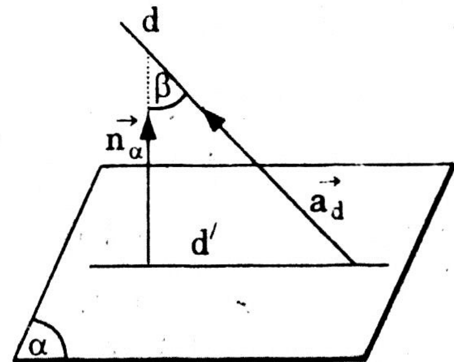
Lập phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng d trên mặt phẳng (α).

Giải

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d và d'. Mặt phẳng này vuông góc với mặt phẳng (α). Mặt phẳng (β) có cặp vectơ chỉ phương gồm vectơ chỉ phương $\vec{a}_d$ của đường thẳng d và vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha$ của mặt phẳng (α).

Ta có : $\vec{a}_d = (2; 1; 3)$

$\vec{n}_\alpha = (1; 1; -2)$.



Từ đó ta tìm được vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là :

$$\vec{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\right) = (-5; 7; 1)$$

Phương trình của (β) có dạng : −5x + 7y + z + D = 0.

Từ phương trình chính tắc của d, ta tìm được điểm M(0;1; 1) ∈ d

Do đó M ∈ (β). Thay tọa độ của M vào (1) ta có :

$$-5.0 + 7.1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

Vậy phương trình của (β) là : −5x + 7y + z − 8 = 0 hay 5x − 7y − z + 8 = 0.

Ta có : d' ≡ (α) ∩ (β).

Vậy phương trình của đường thẳng d', hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) là :

$$d': \begin{cases}5x-7y-z+8=0\\x+y-2z+7=0\end{cases}.$$

Chú thích : *Có thể lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (β) như sau :*

Mặt phẳng (β) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\beta = (-5; 7; 1)$ và đi qua điểm M(0; 1; 1) nên có phương trình là :

$$-5(x - 0) + 7(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow -5x + 7y + z - 8 = 0.$$

Ví dụ 5

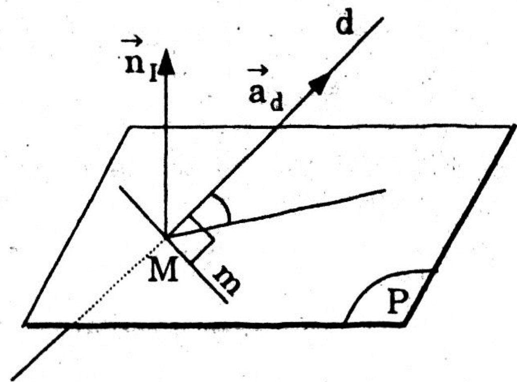
Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình là :

$$d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad (P) : y - z + 2 = 0.$$

a) Qua giao điểm M của d và (P), hãy lập phương trình tham số và tổng quát của đường thẳng Δ vuông góc với (P).

b) Tính góc giữa đường thẳng d và (P). Viết phương trình tổng quát của đường thẳng m đi qua M vuông góc với d và nằm trong (P).

Giải



a) Gọi M = d ∩ (P).

Ta có : $5 - (1 + t) + 2 = 0$

$6 - t = 0 \Rightarrow t = 6$

Tọa độ giao điểm M là :

$$M\begin{cases} x_M = -4 \\ y_M = 5 \\ x_M = 7 \end{cases} \Rightarrow M(-4; 5; 7)$$

Đường thẳng Δ nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (0; 1; -1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là : $\Delta : \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 + t \\ z = 7 - t \end{cases}$.

Phương trình tổng quát của Δ là : $\begin{cases} x = -4 \\ y + z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 0 \\ y + z - 12 = 0 \end{cases}$

b) Ta có : $\vec{a}_d = (-1; 0; 1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d

$\vec{n}_P = (0; 1; -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

$$\sin(\widehat{d, P}) = \left|\cos(\vec{a}_d, \vec{n}_p)\right| = \frac{|-1.0 + 0.1 + 1.(-1)|}{\sqrt{1+0+1}.\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{2}.$$

$\sin(\widehat{d, P}) = \dfrac{1}{2}$. Vậy $(\widehat{d, P}) = \dfrac{\pi}{6} = 30^0$.

Gọi (β) là mặt phẳng qua M nhận $\vec{a_d} = (-1; 0; 1)$ làm vectơ pháp tuyến. Ta có phương trình tổng quát của (β) là :

$$-1(x + 4) + 0(y - 5) + 1(3 - 7) = 0 \Leftrightarrow -x + z - 11 = 0.$$

Vậy m = (β) ∩ (P) có phương trình tổng quát là : $\begin{cases} x - z + 11 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Vấn đề 3 : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Cho đường thẳng a đi qua điểm M, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và đường thẳng b đi qua điểm N có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

- $a \perp b \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$
- a cùng phương với b $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$ với $k \in \mathbb{R}$

  $a \,//\, b \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{b} \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$
- a chéo b $\Leftrightarrow \vec{a}; \vec{b}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
- a cắt b $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}; \vec{b}; \overrightarrow{MN} \text{ đồng phẳng} \\ \vec{a} \neq k\vec{b} \text{ với } k \in R \end{cases}$
- $a \equiv b \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{b} \\ \vec{a} = k_1.\overrightarrow{MN} \end{cases}$

2. Xét mặt phẳng (α) chứa a và (α) cùng phương với b :

- a và b đồng phẳng ⇔ điểm N ∈ (α).
- a và b chéo nhau ⇔ điểm N ∉ (α).

3. Góc giữa hai đường thẳng a và b :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \left|\cos(\vec{a}, \vec{b})\right| = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

4. Cách tìm giao điểm của hai đường thẳng a và b :

- Nếu a và b đều có dạng tham số. Giả sử :

$$a : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad b: \begin{cases} x = x'_0 + t'b_1 \\ y = y'_0 + t'b_2 \\ z = z'_0 + t'b_3 \end{cases}.$$

Tìm t và t' bằng cách giải hệ phương trình : $\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'b_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'b_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'b_3 \end{cases}$.

Giả sử t_M và t'_M là nghiệm duy nhất (nếu có), ta thay t_M hoặc t'_M vào phương trình tham số của a hoặc b ta tìm được giao điểm M của hai đường thẳng a, b.

• Nếu phương trình của a có dạng tham số phương trình của b có dạng tổng quát, ta thực hiện :

Thay các giá trị x, y, z từ phương trình tham số vào phương trình tổng quát ta được hệ hai phương trình chứa t. Nếu hai giá trị của t bằng nhau thì hai đường thẳng a, b cắt nhau.

Thay giá trị đó của t vào phương trình tham số ta sẽ tìm được tọa độ giao điểm.

• Nếu cả hai phương trình đều có dạng tổng quát thì ta giải hệ 4 phương trình 3 ẩn x, y, z hoặc tham số hoá các phương trình đó và giải như ở phần trên.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây :

1. a : $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ b : $\begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$.

2. a : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ b : $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 7 + t' \\ z = 3 + 4t' \end{cases}$.

3. a : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ b : $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$.

Giải

1. Giả sử $M_0(x_0; y_0; z_0)$ là giao điểm của a và b, nghĩa là $M_0 = a \cap b$, do đó :

$$\begin{cases} -3 + 2t = 5 + t' \\ -2 + 3t = -1 - 4t' \\ 6 + 4t = 20 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' - 8 = 0 \\ 3t + 4t' - 1 = 0 \\ 4t - t' - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 7 \\ z_0 = 18 \end{cases} \Rightarrow M_0(3; 7; 18).$$

Vậy a cắt b tại điểm $M_0(3; 7; 18)$.

2. Giả sử $M_0(x_0; y_0; z_0)$ là giao điểm của a và b, ta có :

$$\begin{cases} -1 + t = 1 + 2t' \\ 2t = 7 + t' \\ 2 - t = 3 + 4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2t' - 2 = 0 \\ 2t - t' - 7 = 0 \\ -t - 4t' - 1 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm, nghĩa là a và b không có điểm chung. Đường thẳng a có vectơ chỉ phương $\vec{v_a} = (1; 2; -1)$ và đường thẳng b có vectơ chỉ phương $\vec{v_b} = (2; 1; 4)$. Ta có : $(1 : 2 : -1) \neq (2 : 1 : 4)$

Như vậy $\vec{v_a}$ và $\vec{v_b}$ không cùng phương nên a và b chéo nhau.

3. Ta nhận thấy hai đường thẳng a và b có các vectơ chỉ phương $\vec{v_a} = (1; 1; -1)$ và $\vec{v_b} = (2; 2; -2)$ cùng phương. Xét điểm $M(1; 2; 3) \in$ đường thẳng a, ta thấy

M không thuộc b vì $\begin{cases} 1 = 2 + 2t' \\ 2 = -1 + 2t \\ 3 = 2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' = -1 \\ 2t' = 3 \\ 2t' = -1 \end{cases}$ là vô lý.

Vậy a // b.

Ví dụ 2

Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 :

$$d_1 : \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 & (1) \\ x - y + z - 1 = 0 & (2) \end{cases} ; \quad d_2 : \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 & (3) \\ 2x - y + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Giải

Ta giải hệ bốn phương trình (1), (2), (3) và (4).

Từ $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 & (2) \\ 3x + y - z + 3 = 0 & (3) \end{cases}$ ta có $4x = -2 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Thay $x = -\dfrac{1}{2}$ vào (1) ta có $z = \dfrac{3}{2}$.

Như vậy là từ 3 phương trình (1), (2), (3) của hệ, giải ra ta có nghiệm là $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \dfrac{3}{2}$. Thay các giá trị này vào (4) ta thấy phương trình (4) nghiệm với các giá trị đó. Thực vậy :

$$2x - y + 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 + 1 = 0.$$

Như vậy 2 đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm M có tọa độ là :

$$M\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right).$$

Ví dụ 3

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng a, b sau đây :

$$a: \begin{cases} x = 1 = 2t \\ y = 2 - 2t\,; \\ z = -1 \end{cases} \qquad b: \begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ z - 4 = 0 \end{cases}$$

Giải

Thay các giá trị của x, y, z từ phương trình của a vào phương trình của b ta có :

$$\begin{cases} 3(1 + 2t) + 2(2 - 2t) - 10 = 0 \\ -1 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t - 3 = 0 \\ -5 = 0 \end{cases} \text{ vô lý.}$$

Vậy hệ phương trình trên vô nghiệm, nghĩa là a và b không có điểm chung.

Đường thẳng a có vectơ chỉ phương $\vec{a'} = (2; -2; 0)$.

Đường thẳng b có vectơ chỉ phương $\vec{b'}$, dựa vào các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau có giao tuyến b, ta có :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b'} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2; -3; 0).$$

Ta nhận thấy $\vec{a'}$ và $\vec{b'}$ không cùng phương vì $(2 : -2 : 0) \neq (2 : -3 : 0)$.

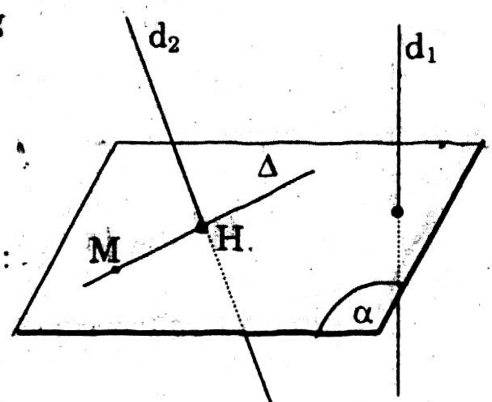
Vậy hai đường thẳng a và b chéo nhau vì chúng không có điểm chung và không cùng phương.

Ví dụ 4

Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm M(0; 1; 1) vuông góc với đường thẳng d_1 : $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 2}{1} = z$ và cắt đường thẳng

$$d_2 : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}.$$

Giải



Trước hết ta lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M(0; 1; 1) và vuông góc với d_1

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương :

$\vec{v} = (3; 1; 1)$.

Từ đó suy ra mặt phẳng (α) có phương trình :

$$3(x - 0) + 1\,(y - 1) + 1.(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0.$$

Gọi H là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường thẳng d_2 có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình : $\begin{cases} 3x + y + z - 2 = 0 & (1) \\ x + y - z + 2 = 0 & (2) \\ x + 1 = 0 & (3) \end{cases}$

Từ (3) ta có x = –1. Thay giá trị này của x vào (1) và (2) ta có :

$$\begin{cases} -3 + y + z - 2 = 0 \\ -1 + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2.$$

Thay giá trị x = –1 và y = 2 vào (2) ta tính được z = 3.

Vậy điểm $H = d_2 \cap (\alpha)$ có tọa độ là (–1; 2; 3).

Ta suy ra vectơ $\overrightarrow{MH} = (-1; 1; 2)$.

Đường thẳng Δ chính là đường thẳng đi qua điểm M(0; 1; 1) nhận $\overrightarrow{MH}$ làm vectơ chỉ phương, do đó Δ có phương trình chính tắc là :

$$\frac{x - 0}{-1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{2}.$$

Ta suy ra Δ có phương trình tổng quát là :

$$\begin{cases} x = -y + 1 \\ 2x = -z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 5

> Tìm góc nhọn hợp bởi hai đường thẳng a và b trong các trường hợp sau :
>
> 1. (a) : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - \sqrt{2}t \\ z = -1 + t \end{cases}$ (b) : $x - 5 = \dfrac{y - 6}{\sqrt{2}} = \dfrac{z - 7}{-1}$.
>
> 2. (a) : $x - 1 = \dfrac{y - 2}{-1} = \dfrac{z - 3}{\sqrt{2}}$ (b) : $\begin{cases} x - y = 1 = 0 \\ \sqrt{2}x - z + 2 = 0 \end{cases}$.

Giải

1. Gọi $\vec{v}_a$ và $\vec{v}_b$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a và b.

Ta có : $\vec{v}_a = (1; -\sqrt{2}; 1)$; $\vec{v}_b = (1; \sqrt{2}; -1)$.

Ta suy ra : $\cos(\widehat{a, b}) = \left|\cos\left(\widehat{\vec{v}_a, \vec{v}_b}\right)\right| = \dfrac{|1 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 2 + 1}.\sqrt{1 + 2 + 1}} = \dfrac{1}{2}$

Vậy $(\widehat{a, b}) = \dfrac{\pi}{3} = 60^0$.

2. Gọi $\vec{v}_a$ và $\vec{v}_b$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a và b.

Ta có $\vec{v_a} = (1; -1; \sqrt{2})$.

Vectơ $\vec{v_b}$ được tính như sau :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_b} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \right) = (1; 1; \sqrt{2})$$

Ta suy ra : $\cos(\widehat{a, b}) = \left|\cos\left(\vec{v_a}, \vec{v_b}\right)\right| = \dfrac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1+1+2}.\sqrt{1+1+2}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $(\widehat{a, b}) = \dfrac{\pi}{3} = 60^0$.

Ví dụ 6

Lập phương trình của đường thẳng đi qua điểm M(–4; 5; 3) và cắt đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là :

$$d_1 : \begin{cases} 2x + 3y + 11 = 0 \\ x + 3z - 5 = 0 \end{cases}; \qquad d_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

Giải

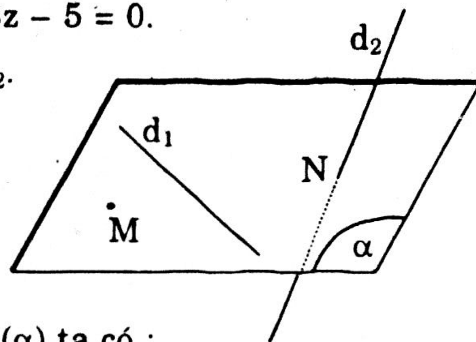
Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi d_1 và M. Mặt phẳng (α) thuộc chùm mặt phẳng có phương trình : $m(2x + 3y + 11) + n(x + 3z - 5) = 0$

$M(-4; 5; 3) \in (\alpha)$ nên ta có : $m(-8 + 15 + 11) + n(-4 + 9 - 5) = 0$

$\Leftrightarrow 18m = 0 \Leftrightarrow m = 0$, ta chọn $n = 1$

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình là : $x + 3z - 5 = 0$.

Bây giờ ta cần tìm giao điểm N của (α) với d_2.



Ta có phương trình tham số của đường thẳng d_2 là : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$

Thay các giá trị của x, y, z vào phương trình (α) ta có :

$(2 + 2t) + 3(1 - 5t) - 5 = 0 \Leftrightarrow -13t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Điểm $N = (\alpha) \cap d_2$ có tọa độ là : N(2; –1; 1)

Ta có $\overrightarrow{MN} = (6; -6; 2)$. Đường thẳng MN có phương trình chính tắc là :

$(MN) : \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z-2}{1}$.

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (9; -6; -3)$.

Hai đường thẳng MN và d_1 đồng phẳng và không cùng phương nên cắt nhau. Như vậy đường thẳng MN đi qua M cắt d_1 và d_2.

Chú thích : *Ta có thể lập phương trình mặt phẳng (β) xác định bởi d_2 và M. Mặt phẳng (β) đi qua điểm A(2; –1; 1) và M nên nhận* $\overrightarrow{AM} = (-6; 6; 2)$ *và* $\vec{v} = (2; 3; -5)$ *làm cặp vectơ chỉ phương.*

Ta tìm vectơ $\vec{n}_\beta = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix}3 & 2\\3 & -5\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & -3\\-5 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 3\\2 & 3\end{vmatrix}\right) = (-9; -11; -15).$

Ta lập phương trình mặt phẳng (β) : $-9(x - 2) - 11(y + 1) - 15(z - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 9x + 11y + 15z - 22 = 0$$

Ta có MN = (α) ∩ (β). Do đó đường thẳng cần tìm có phương trình là :

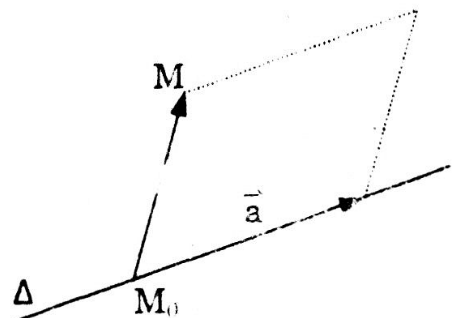
$$\begin{cases} x + 3z - 5 = 0 \\ 9x + 11y + 15z - 22 = 0 \end{cases}.$$

Vấn đề 4 : KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG PHẲNG KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

A. PHƯƠNG PHÁP

- Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ.
  - Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với Δ.
  - Tìm tọa độ giao điểm H = (α) ∩ Δ.
  - $d(M, \Delta) = |\overrightarrow{MH}|$.

  Cách khác : Giả sử đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương.



  - Tìm diện tích $S = |\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{a}|$.
  - $d(M, \Delta) = \overrightarrow{MH} = \dfrac{S}{|\vec{a}|} = \dfrac{|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|}$.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.
  - Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.
  - Lấy một điểm M nào đó trên b (M có tọa độ thỏa mãn phương trình của b).
  - Tính d(a, b) = d(M, (α)).

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \qquad d_2 : x + 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 2}{-3}.$$

Chứng tỏ d_1 và d_2 chéo nhau. Tính khoảng cách giữa chúng.

Giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm A(1; 7; 3) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{V_1} = (2; 1; 4)$

Đường thẳng d_2 đi qua điểm B(–1; 2; 2) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{V_2} = (1; 2; -1)$

Muốn chứng minh d_1, d_2 chéo nhau ta chứng minh ba vectơ $\left\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{AB}\right\}$ không đồng phẳng. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -5; -1)$

và $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \left(\begin{vmatrix}1 & 4\\2 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}4 & 2\\-1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}\right) = (-9; 6; 3) = \overrightarrow{n_\alpha}$

$(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}).\overrightarrow{AB} = 18 - 30 - 3 = -15 \neq 0.$

Vậy d_1 và d_2 chéo nhau.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm B chứa d_2 và song song với d_1. Ta lấy $\overrightarrow{n'_\alpha} = (3; -2; -1)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_\alpha}$ làm vectơ pháp tuyến của (α). Ta có phương trình của (α) là :

$$3(x + 1) - 2(y - 2) - 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z + 9 = 0.$$

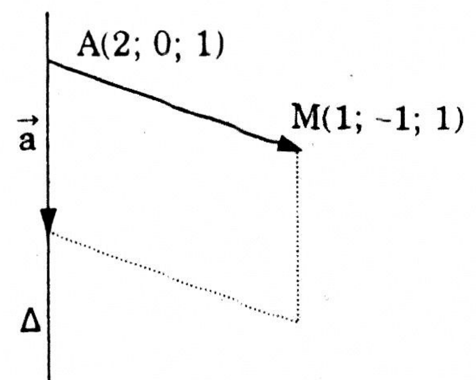
Khoảng cách $d(a, b) = d(A, (\alpha)) = \dfrac{|3.1 - 2.7 - 3 + 9|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \dfrac{5}{\sqrt{14}} = \dfrac{5\sqrt{14}}{14}$.

Ví dụ 2

> Tính khoảng cách từ điểm M(1; –1; 1) đến đường thẳng Δ có phương trình : $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z - 1}{1}$.

Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm A(2; 0; 1) và nhận vectơ $\vec{a} = (1; 3; 1)$ làm vectơ chỉ phương.



Ta tính tích có hướng :

$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}$ với $\overrightarrow{AM} = (-1; -1; 0)$

$d(M, \Delta) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$; trong đó :

$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{a} = \left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\3 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & -1\\1 & 3\end{vmatrix}\right) = (-1; 1; -2).$

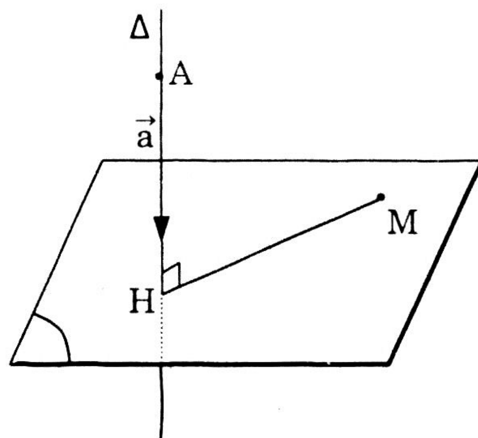
Do đó $d(M, \Delta) = \dfrac{\sqrt{1 + 1 + 4}}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \sqrt{\dfrac{6}{11}}$.

Cách khác : Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M(1; -1; 1) và vuông góc với Δ nên (α) nhận $\vec{a}$ làm vectơ pháp tuyến. Do đó mặt phẳng (α) có phương trình

$$1.(x - 1) + 3(y + 10 + 1.(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + z + 1 = 0 \quad (\alpha)$$

Ta chuyển phương trình đường thẳng Δ sang dạng tham số :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$



Gọi H = Δ ∩ (α).

Ta có : $(2 + t) + 3(3t) + (1 + t) + 1 = 0$

$$11t = -4 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{11}.$$

$$H : \begin{cases} x_H = 2 - \frac{4}{11} = \frac{18}{11} \\ y_H = 3\left(-\frac{4}{11}\right) = -\frac{12}{11} \\ z_H = 1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MH} = \left(\frac{7}{11}; -\frac{1}{11}; -\frac{4}{11}\right)$$

Vậy : $\left|\overrightarrow{MH}\right| = \sqrt{\frac{49 + 1 + 16}{121}} = \sqrt{\frac{6}{11}} \Rightarrow d(M, \Delta) = \sqrt{\frac{6}{11}}$.

Vấn đề 5 : ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

A. PHƯƠNG PHÁP

- Muốn chứng minh hai đường thẳng a, b chéo nhau ta cần thực hiện các bước :

  – Chứng minh $a \cap b \neq \varnothing$.

  – Tìm các vectơ chỉ phương của mỗi đường và chứng minh hai vectơ đó không cùng phương.

- Giả sử đường thẳng a đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, đường thẳng b đi qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\vec{b}$. Muốn chứng minh a, b chéo nhau ta cần chứng minh :

  – Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$ không đồng phẳng :

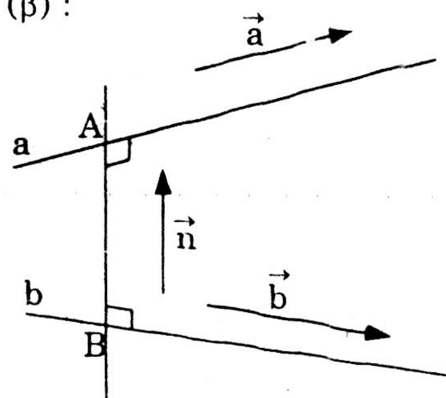
  $(\vec{a} \wedge \vec{b}).\overrightarrow{AB} \neq 0$ nghĩa là chứng minh vectơ $\vec{a} \wedge \vec{b}$ không vuông góc với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

  – Hoặc không tồn tại hệ thức $\overrightarrow{AB} = m\vec{a} + n\vec{b}$

• Để lập phương trình đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta cần thực hiện các bước :

– Tìm vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của đường thẳng a và vectơ chỉ phương $\vec{b}$ của đường thẳng b, rồi tìm vectơ $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ có tính chất $\vec{n} \perp \vec{a}$ và $\vec{n} \perp \vec{b}$.

– Lập phương trình của hai mặt phẳng (α) và (β) :



(α) chứa a và cùng phương với $\vec{n}$ (nhận $\vec{a}$, $\vec{n}$ làm cặp vectơ chỉ phương).

(β) chứa b và cùng phương với $\vec{n}$ (nhận $\vec{b}$, $\vec{n}$ làm cặp vectơ chỉ phương).

– Lập phương trình của Δ = (α) ∩ (β).

Chú thích : *Muốn lập phương trình đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b ta còn có thể thực hiện theo các bước sau đây :*

• ***Cách 1 :***

– Tìm vectơ chỉ phương $\vec{n}$ của đường vuông góc chung thỏa mãn điều kiện $\vec{n} \perp \vec{a}$ và $\vec{n} \perp \vec{b}$.

– Lập phương trình mặt phẳng (β) chứa b và cùng phương với $\vec{n}$ (nhận $\vec{b}$ và $\vec{n}$ làm cặp vectơ chỉ phương).

– Tìm giao điểm A = a ∩ (β).

– Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm A nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương : Đó là đường vuông góc chung của a và b.

• ***Cách 2 :***

– Chuyển phương trình của a và b về dạng tham số. Giả sử a và b có phương trình :

$$(a) : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \qquad (b) : \begin{cases} x = x_1 + t'b_1 \\ y = y_1 + t'b_2 \\ z = z_1 + t'b_3 \end{cases}$$

Như vậy có nghĩa là đường thẳng a đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và đường thẳng b đi qua điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

Bây giờ trên đường thẳng a ta lấy một điểm A bất kỳ có tọa độ là $(x_0 + ta_1; y_0 + ta_2; z_0 + ta_3)$ và trên đường thẳng b ta lấy một điểm B bất kỳ có tọa độ là $(x_1 + t'b_1; y_1 + t'b_2; z_1 + t'b_3)$. Khi đó ta có :

$\overrightarrow{AB} = (x_1 + t'b_1 - x_0 - ta_1; y + t'b_2 - y_0 - ta_2; z_1 + t'b_3 - z_0 - ta_3)$.

Muốn đường thẳng AB là đường thẳng vuông góc chung của a và b ta cần

có : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{b} = 0 \end{cases}$.

Ta được một hệ hai phương trình chứa các ẩn là t và t'. Giải hệ phương trình này ta tính được giá trị $t = t_0$ và $t' = t'_0$.

Thay giá trị $t = t_0$ vào phương trình tham số của đường thẳng a, ta tính được tọa độ giao điểm $A = a \cap \Delta$ và thay tọa độ $t' = t'_0$ vào phương trình tham số của đường thẳng b ta tính được tọa độ giao điểm $B = b \cap \Delta$.

– Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm A, B ta được phương trình của đường vuông góc chung Δ. Ta có thể chỉ cần tìm một trong hai điểm A, B rồi viết phương trình tham số của Δ qua điểm đó và nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương. Lập phương trình bằng cách này ta tính luôn được khoảng cách của hai đường thẳng a, b chéo nhau. Ta có $d(a, b) = |\overrightarrow{AB}|$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Cho hai đường thẳng (a) và (b) lần lượt có phương trình :

$$(a) : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}; \qquad (b) : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng a và b chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa a và b.

c) Lập phương trình đường vuông góc chung của a và b.

Giải

a) Đường thẳng a đi qua điểm A(2; –1; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3; -2; 2)$.

Đường thẳng b đi qua điểm B(–1; 2; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (3; 2; 0)$.

Ta nhận thấy a và b không cùng phương vì $3 : -2 : 2 \neq 3 : 2 : 0$.

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 1)$.

Ta hãy xét : $(\vec{a} \wedge \vec{b}).\overrightarrow{AB}$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-4; 6; 12)$$

$(\vec{a} \wedge \vec{b}).\overrightarrow{AB} = 12 + 18 + 12 = 42 \neq 0$. Vậy ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$ không đồng phẳng và ta suy ra hai đường thẳng a, b chéo nhau.

b) Ta lập phương trình mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.

Mặt phẳng này đi qua điểm A(2; –1; 0) và nhận $\vec{a} = (3; -2; 2)$, $\vec{b} = (3; 2; 0)$ làm cặp vectơ chỉ phương, nên nhận $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-4; 6; 12)$ làm vectơ pháp tuyến $\vec{n}$. Ta chọn vectơ $\vec{n'} = (2; -3; -6)$ cùng phương với $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và có phương trình của (α) là :

$$2(x-2) - 3(y+1) - 6(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 6z - 7 = 0.$$

Ta có $d(a, b) = d(B, (\alpha))$.

Khoảng cách từ điểm B(–1; 2; 1) trên B tới mặt phẳng (α) nói trên là :

$$d(B; (\alpha)) = \frac{|2.(-1) - 3.2 - 6.1 - 7|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{21}{\sqrt{49}} = 3.$$

c) Vectơ $\vec{n'} = (2; -3; -6)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng vuông góc chung vì $\vec{n'} \perp \vec{a}$ và $\vec{n'} \perp \vec{b}$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A(2; –1; 0) và hai vectơ $\vec{a} = (3; -2; 2)$ và $\vec{n'} = (2; -3; -6)$ làm cặp vectơ chỉ phương. Do đó ta có phương trình tổng quát của (P) là :

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}(x-2) + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}(y+1) + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 18x + 22y - 5z - 14 = 0$$

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua điểm B(–1; 2; 1) và nhận hai vectơ $\vec{b} = (3; 2; 0)$, $\vec{n'} = (2; 3; -6)$ làm cặp vectơ chỉ phương. Do đó ta có phương trình tổng quát của (Q) là :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}(x+1) + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}(y-2) + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}(z-1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow -12x + 18y + 13z + 35 = 0$$

Vậy đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b là :

$$\begin{cases} 18x + 22y - 5z - 14 = 0 \\ 12x - 18y - 13z - 35 = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2

Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng :

$$(a) : \begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}; \quad (b) : \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Giải

Gọi $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, ta có :

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 0\end{vmatrix}\right) = (-3; 1; -6)$$

$\vec{b}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b, ta có :

$$\vec{b} = \left(\begin{vmatrix}-2 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 0\end{vmatrix}\right) = (-2; -1; 4)$$

Ta lấy điểm A(2; 1; 3) ∈ a và B (3; 0; -6) ∈ b

Gọi $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung của a và b, ta có :

$$\vec{n} \perp \vec{a},\ \vec{n} \perp \vec{b}.$$

Do đó : $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix}1 & -6\\-1 & 4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-6 & -3\\4 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 1\\-2 & -1\end{vmatrix}\right) = (-2; 24; 5).$

- Gọi (α) là mặt phẳng chứa a và cùng phương với $\vec{n}$. Gọi $\vec{n}_\alpha$ là vectơ pháp tuyến của (α) ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix}1 & -6\\24 & 5\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-6 & -3\\5 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 1\\-2 & 24\end{vmatrix}\right) = (149; 27; -70).$$

Phương trình của mặt phẳng (α) có dạng :

$$149(x - 2) + 27(y - 1) - 70(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 149x + 27y - 70z - 115 = 0 \qquad (\alpha)$$

- Gọi (β) là mặt phẳng chứa b và cùng phương với $\vec{n}$. Gọi $\vec{n}_\beta$ là vectơ pháp tuyến của (β), ta có :

$$\vec{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix}-1 & 4\\24 & 5\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}4 & -2\\5 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-2 & -1\\-2 & 24\end{vmatrix}\right) = (-101; 2; -50).$$

Phương trình của mặt phẳng (β) có dạng :

$$-101(x - 3) + 2(y - 0) - 50(z + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -101x + 2y - 50z + 3 = 0 \qquad (\beta)$$

Ta có Δ = (α) ∩ (β) nên phương trình của đường thẳng vuông góc chung là :

$$\Delta : \begin{cases}149x + 27y - 70z - 115 = 0\\101x - 2y + 50z - 3 = 0\end{cases}.$$

Ví dụ 3

Cho hai đường thẳng m, n chéo nhau có phương trình :

$$(m) : \begin{cases}x = 1\\y = -4 + 2t;\\z = 3 + t\end{cases} \qquad (n) : \begin{cases}x = -3m\\y = 3 + 2m.\\z = -2\end{cases}$$

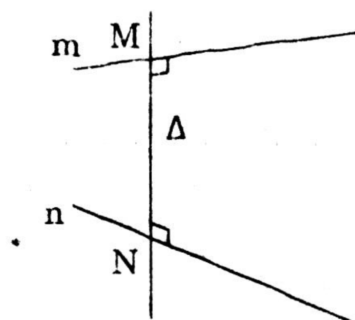
a) Tìm các giao điểm M, N của đường thẳng vuông góc chung Δ với các đường thẳng n, m.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau m và n.

c) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng vuông góc chung Δ của hai đường thẳng m và n.

Giải

a) Đường thẳng m có vectơ chỉ phương $\vec{m} = (0; 2; 1)$.



Đường thẳng n có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (-3; 2; 1)$.

Trên đường thẳng m, ta lấy điểm M có tọa độ $(1; -4 + 2t; 3 + t)$ và trên đường thẳng n, ta lấy điểm N có tọa độ : $(-3u; 3 + 2u; -2)$.

Ta có : $\overrightarrow{MN} = (-3u - 1; 2u - 2t + 7; -t - 5)$.

Muốn cho MN là đường vuông góc chung thì ta cần có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2u - 2t + 7) - t - 5 = 0 \\ -3(-3u - 1) + 2(2u - 2t + 7) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u + 5t + 9 = 0 \\ 13u - 4t = 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Thay t = 1 vào phương trình của đường thẳng m, ta tính được tọa độ giao điểm M là $(1; -2. 4)$ và thay $u = -1$ vào phương trình của đường thẳng n ta tính được tọa độ của giao điểm N là $(3; 1; -2)$

b) Ta có : $d(m, n) = \left|\overrightarrow{MN}\right|$ với $\overrightarrow{MN} = (2; 3; -6)$

Nên $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$.

c) **Đường** thẳng vuông góc chung MN đi qua điểm $M(1; -2; 4)$ và nhận $\overrightarrow{MN} = (2; 3; -6)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = 1 + 2v & (1) \\ y = -2 - 3v & (2) \\ z = 4 - 6v & (3) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $v = \dfrac{x - 1}{2}$. Thay giá trị này của v vào (2) và (3) rồi rút gọn ta được phương trình tổng quát của đường vuông góc chung là :

$$\begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ 3x + z - 7 = 0 \end{cases}$$

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

Trong hệ tọa độ trực chuẩn cho họ mặt phẳng (P_m) có phương trình :

$$2x + y + z - 1 + m(x + y + z + 1) = 0, \text{ m là tham số.}$$

a) Chứng minh rằng với mọi m, mặt phẳng (P_m) luôn luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định.

b) Tìm m để mặt phẳng (P_m) vuông góc với mặt phẳng (P_0) có phương trình : $2x + y + z = 0$.

Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d).

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI NĂM 1995)

Giải

a) Các mặt phẳng (P_m) thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi hai mặt phẳng có phương trình : $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$

Đây chính là phương trình đường thẳng (d) cố định cần tìm vì hai mặt phẳng này luôn luôn cắt nhau (vì $2 : 1 : 1 \neq 1 : 1 : 1$).

b) Gọi $\vec{n_m}$ và $\vec{n_0}$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của (P_m) và (P_0). Ta có :

$(P_m) \perp (P_0) \Leftrightarrow \vec{n_m} \perp \vec{n_0} \Leftrightarrow \vec{n_m} . \vec{n_0} = 0.$

Phương trình của (P_m) có dạng : $(2 + m)x + (1 + m)y + (1 + m)z - 1 + m = 0$.

Do đó : $\vec{n_m} = (2 + m; 1 + m; 1 + m)$, $\vec{n_0} = (2; 1; 1)$.

$$\vec{n_m}.\vec{n_0} = 2(2 + m) + (1 + m) + (1 + m) = 4m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Muốn $(P_m) \perp (P_0)$ cần chọn $m = -\frac{3}{2}$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{d}$. Ta có :

$$\vec{d} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0; -1; 1).$$

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng d. Mặt phẳng (α) nhận $\vec{d}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $-y + z = 0$.

Gọi $H = (\alpha) \cap d$. Tọa độ của H là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 2z + y + z - 1 = 0 \\ x = y = z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(2; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

Do đó, khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là :

$$|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Bài 2

Trong không gian với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz, cho hai đường thẳng với phương trình tham số : $(d_1) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$; $(d_2) : \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 2s - 3 \\ z = 3s + 1 \end{cases}$.

a) Chứng tỏ rằng (d_1) và (d_2) là hai đường thẳng chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI NĂM 1994)

Giải

a) Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng (d_1) là $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; 3)$ và vectơ chỉ phương của đường thẳng (d_2) là $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; 3)$.

Ta nhận thấy $\overrightarrow{a_1}$ và $\overrightarrow{a_2}$ không cùng phương. Tọa độ giao điểm (nếu có) của (d_1) và (d_2) sẽ thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2t + 1 = s + 2 & (1) \\ t + 2 = 2s - 3 & (2) \\ 3t - 3 = 3s + 1 & (3) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1),(2) \Rightarrow 3t = 3s - 4 \\ (3) \Rightarrow 3t = 3s + 4 \end{matrix} \quad \text{hệ vô nghiệm.}$$

Vậy (d_1) và (d_2) không có điểm chung và khác phương nên chúng chéo nhau.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_1) và song song với (d_2) nên có vectơ pháp tuyến là :

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_2} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3; -3; 3).$$

Chọn vectơ $\overrightarrow{n'} = (1; 1; -1)$ cùng phương $\overrightarrow{n_\alpha}$ làm vectơ pháp tuyến của (α).

Mặt phẳng (α) đi qua điểm M(1; 2; 3) và nhận $\overrightarrow{n'} = (1; 1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là : $1.(x - 1) + 1.(y - 2) - 1(z + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow x + y - z - 6 = 0.$$

Lấy điểm N(2; –3; 1) thuộc (d_2). Khoảng cách từ N đến mặt phẳng (α) chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2) được ký hiệu là $d(d_1, d_2)$.

$$d(N, (\alpha)) = \frac{|2 - 3 - 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} = d(d_1, d_2).$$

❒ Chú thích :

- Câu a : Có thể chứng minh ba vectơ $\left\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \overrightarrow{MN}\right\}$ không đồng phẳng.

- Câu b : Có thể tính dựa vào công thức : $d(d_1, d_2) = \dfrac{\left|(\vec{a_1} \wedge \vec{a_2}).\overrightarrow{MN}\right|}{|\vec{a_1} \wedge \vec{a_2}|}$.

Bài 3

Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) lần lượt có phương trình :

$$(d_1) : \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \qquad (d_2) : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

1. Chứng tỏ rằng đó là hai đường thẳng chéo nhau.
2. Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM NĂM 1998)

Giải

1. Đường thẳng (d_1) đi qua điểm A(7; 3; 9) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; -1)$.

Đường thẳng (d_2) đi qua điểm B(3; 1; 1) có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (-7; 2; 3)$.

Ta nhận thấy hai đường thẳng (d_1) và (d_2) không cùng phương. Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) nếu có sẽ thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = 7 + t = 3 - 7u & (1) \\ y = 3 + 2t = 1 + 2u & (2) \\ z = 9 - t = 1 + 3u & (3) \end{cases}.$$

Từ (1) và (3), ta tìm được u = –3 và t = 17. Thay các giá trị này vào (2) ta có : $3 + 34 \neq 1 - 6$. Vậy hệ phương trình trên vô nghiệm, nghĩa là (d_1) và (d_2) không có điểm chung. Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) không có điểm chung và không cùng phương. Vậy chúng chéo nhau.

2. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_2) và vuông góc với (d_1). Như vậy mặt phẳng (α) nhận vectơ chỉ phương của (d_1) làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm B(3; 1; 1) nên có phương trình là : $1(x - 3) + 2(y - 1) - 1(z - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 2y - z - 4 = 0 \ (\alpha).$$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (d_1) và vuông góc với (d_2). Như vậy mặt phẳng (β) nhận vectơ chỉ phương của (d_2) làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm A(7; 3; 9) nên có phương trình là : $-7(x - 7) + 2(y - 3) + 3(z - 9) = 0$

$$\Leftrightarrow -7x + 2y - 3z + 16 = 0 \ (\beta).$$

Ta suy ra đường vuông góc chung Δ của (d_1) và (d_2) có phương trình là :

$$(\Delta) : \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 7x - 2y + 3z - 16 = 0 \end{cases}.$$

Bài 4

> Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng (D_1); (D_2) có phương trình :
>
> $$(D_1): \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5} \qquad (D_2): \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}.$$
>
> Tìm phương trình chính tắc của đường vuông góc chung (d) của (D_1), (D_2).
>
> Tính tọa độ các giao điểm H, K của d với (D_1), (D_2).
>
> (ĐỀ THI ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM NĂM 1997)

Giải

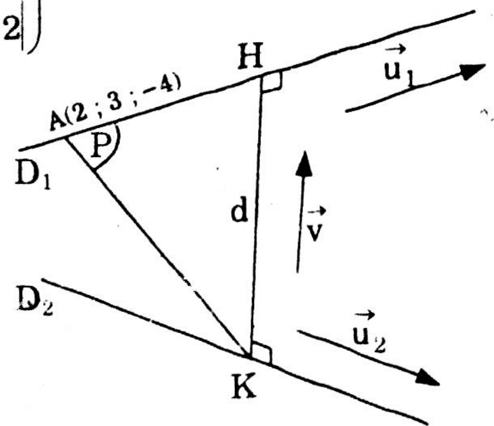
Đường thẳng (D_1) đi qua điểm A(2; 3; 4) và có vectơ chỉ phương $\vec{u_1} = (2; 3; -5)$.

Đường thẳng (D_2) có vectơ chỉ phương $\vec{u_2} = (3; -2; -1)$.

Gọi $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung (d) thì : $\vec{v} \perp \vec{u_1}$ và $\vec{v} \perp \vec{u_2}$.

Ta có : $\vec{v} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right)$

$\Rightarrow \vec{v} = (-13; -13; -13)$.



Có thể lấy $\vec{v'} = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương của d.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (D_1) và (d).

Do đó (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n_p} = \vec{u_1} \wedge \vec{v'}$.

$$\vec{n_p} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (8; -7; -1).$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A(2; 3; −4) nhận $\vec{n_p}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là :

$$8(x-2) - 7(y-3) - (z+4) = 0 \Leftrightarrow 8x - 7y - z + 1 = 0.$$

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng (D_2). Viết phương trình của (D_2) dưới dạng tham số và thay các giá trị của x, y, z vào phương trình của (P), ta có :

$$8(-1+3t) - 7(4-2t) - (4-t) + 1 = 0 \Leftrightarrow -39 + 39t = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Thay t = 1 vào phương trình tham số của (D_2), ta tìm được tọa độ giao điểm K(2; 2; 3).

Do đó ta có phương trình chính tắc của d đi qua K và nhận $\vec{v'}$ làm vectơ chỉ phương là : $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Gọi $H = (D_1) \cap (d)$. Ta có phương trình tham số của (D_1) và (d) như sau :

$$(D_1): \begin{cases} x = 2 + 2u \\ y = 3 + 3u \\ z = -4 - 5u \end{cases} \qquad (d): \begin{cases} x = 2 + v \\ y = 2 + v \\ z = 3 + v \end{cases}$$

Tọa độ của giao điểm H thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = 2 + 2u = 2 + v \\ y = 3 + 3u = 2 + v \\ z = -4 - 5u = 3 + v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = -2 \end{cases}$$

Thay u = −1 vào phương trình của (D_1) hoặc v = −2 vào phương trình của (d) ta tìm được tọa độ giao điểm H là (0; 0; 1).

Bài 5

Trong không gian với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz, cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}; \qquad (P): 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

a) Tìm tọa độ các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 1.

b) Gọi K là điểm đối xứng của điểm I(2; −1; 3) qua đường thẳng (d). Hãy xác định tọa độ điểm K.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI NĂM 1998)

Giải

a) Giả sử điểm M(1 + 2t; 2 − t; 3t) thuộc d. Khi đó khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là :

$$d(M, P) = \frac{|2(1 + 2t) - (2 - t) - 2.3t + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 1$$

$$= \frac{|1 - t|}{3} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Với : t = 4 ta có điểm M(9; −2; 12).

t = 2 ta có điểm M'(−3; 4; −6).

Hai điểm M và M' nói trên thuộc (d) và có khoảng cách tới mặt phẳng (P) bằng 1.

b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua điểm I(2; −1; 3) và vuông góc với (d) nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n_a} = (2; -1; 3)$. Do đó (Q) có phương trình

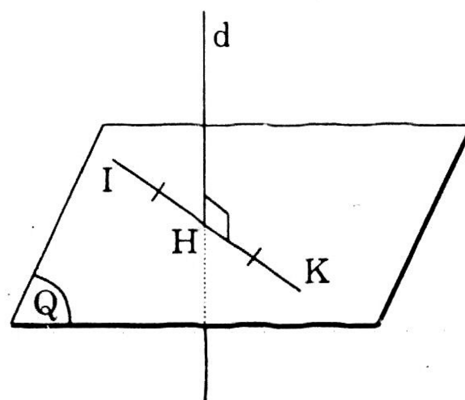
(Q) : $2(x - 2) - 1(y + 1) + 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z - 14 = 0$

Mặt phẳng (Q) cắt đường thẳng (d) tại điểm H.

Tọa độ của H được xác định bởi phương trình :

$$2(1 + 2t) - (2 - t) + 3(3t) - 14 = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Thay giá trị t = 1 vào phương trình của (d), ta tìm được tọa độ của H là : H(3; 1; 3).



Ta có $\overrightarrow{IH} = (1; 2; 0)$

mà $\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{IH} = (2; 4; 0)$.

Do đó : $\begin{cases} x_K = 2 + 2 = 4 \\ y_K = -1 + 4 = 3 \\ z_K = 3 + 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow$ Vậy K(4; 3; 3).

Bài 6

Trong không gian cho hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz và cho các điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0); C(0; 0; c); (a, b, c dương).

Dựng hình hộp chữ nhật nhận O, A, B, C làm bốn đỉnh và gọi D là đỉnh đối diện với đỉnh O của hình hộp đó.

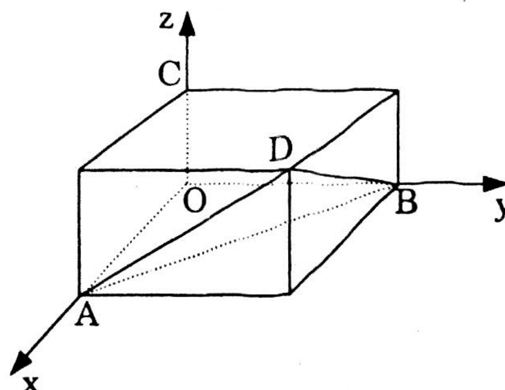
1. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABD).

2. Tính tọa độ hình chiếu vuông góc của C xuống mặt phẳng (ABD). Tìm điều kiện đối với a, b, c để hình chiếu đó nằm trong mặt phẳng (xOy).

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI NĂM 1998)

Giải

1. Đỉnh D của hình hộp có tọa độ là (a; b; c).



Do đó : $\overrightarrow{AD} = (0; b; c)$

$\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0)$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABD), ta có:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ b & c \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & b \\ 0 & b \end{vmatrix} \right)$$

$$= (bc; ca; -ab).$$

Mặt phẳng (ABD) đi qua điểm A(a; 0; 0) và nhận $\vec{n} = (bc; ca; -ab)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là :

$$bc(x - a) + ca(y - 0) - ab(z - 0) = 0 \Leftrightarrow bcx + cay - abz - abc = 0$$

Khoảng cách từ C(0; 0; c) đến mặt phẳng (ABD) là :

$$d(C, (ABD)) = \frac{|bc.0 + ca.0 - abc - abc|}{\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}} = \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C xuống mặt phẳng (ABD). Đường

thẳng CH có phương trình chính tắc : $\frac{x}{bc} = \frac{y}{ca} = \frac{z-c}{-ab} = t$.

Ta có H là giao điểm của đường thẳng CH với mặt phẳng (ABD). Chuyển phương trình chính tắc của CH thành phương trình tham số ta có : $x = bct$, $y = cat$, $z = c - abt$.

Thay các giá trị này vào phương trình của mặt phẳng (ABD), ta tìm được tọa độ điểm H ứng với giá trị của tham số t tìm được trong phương trình sau :

$$bc(bct) + ca(cat) - ab(c - abt) - abc = 0$$

$$t(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - 2abc = 0 \Rightarrow t = \frac{2abc}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}.$$

Ta có tọa độ giao điểm H :

$$x_H = \frac{2ab^2c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}; \quad y_H = \frac{2a^2bc^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2};$$

$$z_H = \frac{c(c^2a^2 + c^2b^2 - a^2b^2)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}.$$

Điểm $H \in mp\,(xOy) \Leftrightarrow c^2a^2 + c^2b^2 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Bài 7

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (d) và (Δ) biết phương trình của chúng như sau :

$$(d) : \begin{cases} 2x - y - 11 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases} \qquad (\Delta) : \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{3}$$

1. Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng (d).

2. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d) và (Δ) cùng thuộc một mặt phẳng, viết phương trình mặt phẳng đó.

3. Viết phương trình chính tắc của hình chiếu song song của (d) theo phương Δ lên mặt phẳng $3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC XÂY DỰNG NĂM 1997)

Giải

1. Gọi $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d), ta có :

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1; 2; -1).$$

2. Chuyển phương trình đường thẳng Δ sang dạng tổng quát, ta có :

$$\begin{cases} x - 5 = 2y - 4 \\ 3x - 15 = 2z - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3x - 2z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Hai đường thẳng (d) và (Δ) không cùng phương vì $1 : 2 : -1 \neq 2 : 1 : 3$ nên

muốn chứng minh chúng thuộc một mặt phẳng, ta chứng minh (d) và (Δ) cắt nhau. Tọa độ giao điểm thỏa mãn hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 & (1) \\ 3x - 2z - 3 = 0 & (2) \\ 2x - y - 11 = 0 & (3) \\ x - y - z + 5 = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta tính được x = 7; y = 3. Thay các giá trị này vào (4) ta tính được z = 9. Ta nhận thấy giá trị này cũng nghiệm phương trình (2). Vậy (d) và (Δ) cắt nhau tại điểm M(7; 3; 9) và cùng một mặt phẳng (β). Mặt phẳng (β) đi qua điểm M(7; 3; 9) và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; 2; -1)$ và $\vec{b} = (2; 1; 3)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (7; -5; -3).$$

Do đó mặt phẳng (β) có phương trình là :

$$7(x - 7) - 5(y - 3) - 3(z - 9) = 0 \Leftrightarrow 7x - 5y - 3z - 7 = 0.$$

3. Giao điểm của Δ và mặt phẳng 3x − 2y − 1 = 0 có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3x - 2z - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$ là điểm thuộc d' = (β) ∩ (γ).

Đường thẳng d', hình chiếu song song của d chính là giao tuyến của mặt phẳng (β) với mặt phẳng (γ) có phương trình 3x − 2y −2z − 1 = 0. Ta suy ra d' có vectơ chỉ phương $\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \right) = (16; 23; -1).$

Vậy d' có phương trình chính tắc là : $\dfrac{x-3}{16} = \dfrac{y-1}{23} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Bài 8

Cho đường thẳng (d_k) : $\dfrac{x-3}{k+1} = \dfrac{y+1}{2k+3} = \dfrac{z+1}{1-k}$ với k là tham số.

1. Chứng minh rằng (d_k) luôn luôn nằm trong một mặt phẳng cố định. Viết phương trình mặt phẳng đó

2. Xác định k để đường thẳng (d_k) song song với hai mặt phẳng :

$$6x - y - 3z - 13 = 0 \quad \text{và} \quad x - y + 2z - 3 = 0.$$

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC THỦY LỢI NĂM 1999)

Giải

1. Đường thẳng (d_k) có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (k + 1; 2k + 3; 1 - k)$. Nếu (d_k)

luôn luôn nằm trong mặt phẳng (P) cố định thì vectơ $\vec{v}$ của (d_k) phải luôn luôn vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P). nghĩa là $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

Giả sử $\vec{n} = (x; y; z)$, khi đó ta có :

$$\vec{n}.\vec{v} = x(k + 1) + y(2k + 3) + z(1 - k) = 0 \text{ với } \forall k$$

$$\Leftrightarrow (x + 2y - z)k + (x + 3y + z) = 0 \text{ với } \forall k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = 5z \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (5z; -2z; z)$$

Vậy mặt phẳng (P) cần tìm có vectơ pháp tuyến $\vec{n'} = (5; -2; 1)$. Mặt khác vì điểm A (3; –1; –1) luôn luôn thuộc (d_k) nên mặt phẳng (P) cũng chứa A(3; –1; –1). Do đó mặt phẳng (P) có phương trình là :

$$5(x - 3) - 2(y + 1) + 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y + z - 16 = 0.$$

2. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho. Ta có phương trình của (Δ):

$$\begin{cases} 6x - y - 3z - 13 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ. Ta có :

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-5; -15; -5).$$

Ta có thể lấy vectơ $\vec{u'} = (1; 3; 1)$ cùng phương với $\vec{u}$ làm vectơ chỉ phương của Δ. Cần và đủ để (d_k) // Δ là hai vectơ chỉ phương của chúng cùng phương và chúng không có điểm chung.

$$\vec{v} // \vec{u'} \Leftrightarrow \frac{k+1}{1} = \frac{2k+3}{3} = \frac{1-k}{1} = \frac{k+1+1-k}{1+1} = 1.$$

Với k = 0 ta có $\vec{v} // \vec{u'}$, khi đó (d_k) có phương trình $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}$ và (d_k) không có điểm chung với Δ vì với x = 3 + t; y = –1 + 3t; z = 1 + t thay vào phương trình của hai mặt phẳng ta có kết quả là các phương trình đều vô nghiệm. Thật vậy :

$$\left.\begin{array}{l} 6(3 + t) - (-1 + 3t) - 3(1 + t) - 13 = 0 \Leftrightarrow 0.t + 3 = 0 \\ (3 + t) - (-1 + 3t) + 2(1 + t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 0.t + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{vô lý !}$$

Vậy các phương trình vô nghiệm và ta có (d_k) // Δ.

Bài 9

Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxyz, cho một hình tứ diện với bốn đỉnh O(0; 0; 0); A(6; 3; 0); B(–2; 9; 1); S(0; 5; 8).

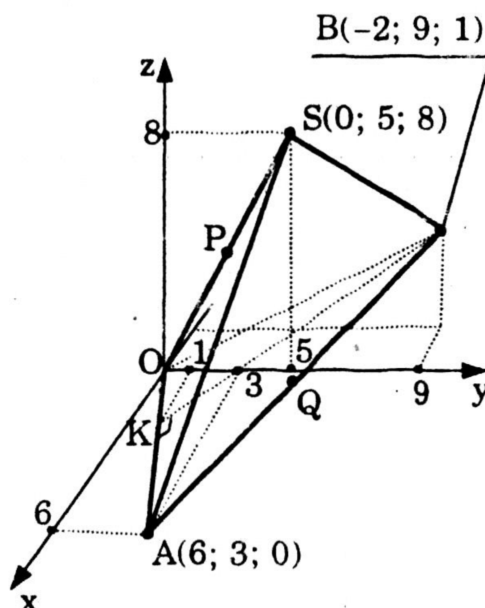
1. Chứng minh SB vuông góc với OA.

2. Chứng minh hình chiếu của cạnh SB lên mặt phẳng OAB vuông góc với cạnh OA. Gọi K là giao điểm của hình chiếu đó với OA. Hãy tìm tọa độ điểm K.

3. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SO và AB. Tìm tọa độ điểm M trên SB sao cho PQ và KM cắt nhau.

(ĐỀ THI ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI NĂM 1999)

Giải



1. $\overrightarrow{OA} = (6; 3; 0)$, $\overrightarrow{SB} = (-2; 4; -7)$.

Ta có :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{SB} = -12 + 12 + 0 = 0 \Rightarrow SB \perp OA.$$

2. Kẻ SH ⊥ mp (OAB), ta có :

$$\left.\begin{matrix} SH \perp OA \\ SB \perp OA \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA \perp (SKB) \Rightarrow OA \perp (BK).$$

Mặt phẳng (SBK) nhận $\overrightarrow{OA} = (6; 3; 0)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua điểm S (0; 5; 8) nên có phương trình :

$$6(x - 0) + 3(y - 5) + 0.(z - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0.$$

Phương trình của đường thẳng OA : $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{0}$.

Chuyển sang phương trình tham số : x = 6t; y = 3t; z = 0. Thay các giá trị này vào phương trình mặt phẳng (SBK) ta có :

$$2(6t) + (3t) - 5 = 0$$

$$15t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow K(2; 1; 0).$$

3. P là trung điểm của SO nên có tọa độ là $P\left(0; \dfrac{5}{2}; 4\right)$.

Q là trung điểm của AB nên có tọa độ là $Q = \left(2; 6; \dfrac{1}{2}\right)$.

Ta cần tìm giao điểm M của mặt phẳng (PQK) với đường thẳng SB. Hai vectơ chỉ phương của mặt phẳng (PQK) là

$$\overrightarrow{PK} = \left(2; -\frac{3}{2}; -4\right) \text{ và } \overrightarrow{QK} = \left(0; -5; -\frac{1}{2}\right).$$

Gọi $\vec{m} = (4; -3; -8) \,//\, \overrightarrow{PK}$ và $\vec{n} = (0; 10; 1) \,//\, \overrightarrow{QK}$. Mặt phẳng (PQK) có phương trình là :

$$\begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}(x-2) + \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(y-1) + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}(z-0) = 0.$$

$\Leftrightarrow 77(x-2) - 4(y-1) + 40z = 0 \Leftrightarrow 77x - 4y + 40z - 150 = 0.$

Đường thẳng SB có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2t \\ y = 5 - 4t \\ z = 8 + 7t \end{cases}$

Thay các giá trị này vào phương trình của mặt phẳng (PQK) ta có :

$$77(2t) - 4(5 - 4t) + 40(8 + 7t) - 150 = 0$$

$$450t - 150 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Do đó điểm M có tọa độ $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{31}{3}\right)$.

Bài 10

Trong không gian Oxyz cho các đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2)

$(\Delta_1): \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad (\Delta_2): \begin{cases} x = 2 + at \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

với a là một số thực cho trước và t là tham số.

1. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa (Δ_1) và song song với (Δ_2).
2. Xác định a để tồn tại mặt phẳng (Q) chứa (Δ_1) và vuông góc với (Δ_2).

(ĐỀ THI CAO ĐẲNG HẢI QUAN NĂM 1999)

Giải

1. Ta lấy một điểm A thuộc (Δ_1) bằng cách cho z = 0 dựa vào phương trình của (Δ_1) ta tính được $y = -\frac{1}{7}$; $x = -\frac{5}{7}$.

Như vậy điểm $A \in (\Delta_1)$ có tọa độ là $\left(-\frac{5}{7}; -\frac{1}{7}; 0\right)$

Ta cần tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ_1).

$$\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) = (-7; -7; -7)$$

Ta có thể lấy vectơ $\vec{v'} = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương của (Δ_1)

Đường thẳng (Δ_2) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a, 2, -3)$.

Mặt phẳng song song (P) muốn chứa (Δ_1) và song song với (Δ_2) phải đi qua điểm $A\left(-\frac{5}{7}; -\frac{1}{7}; 0\right)$ và nhận cặp vectơ chỉ phương là $\vec{v'}$, $\vec{u}$ nói trên. Gọi $\vec{n}$

là vectơ pháp tuyến của (P) ta có :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} \right) = (-5;\ a + 3;\ 2 - a).$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là :

$$-5\left(x + \frac{5}{7}\right) + (a + 3)\left(y + \frac{1}{7}\right) + (2 - a)(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x + (a + 3)\,y + (2 - a)z + \frac{a - 22}{7} = 0.$$

Chú ý rằng đường thẳng (Δ_2) phải không nằm trong (P) nên (P) không chứa điểm B(2; –1; 3) thuộc Δ_2, nghĩa là tọa độ của B không thỏa mãn phương trình của (P)

$$-5.2 + (a + 3)(-1) + (2 - a).3 + \frac{a - 22}{7} \neq 0 \text{ hay } a \neq -\frac{71}{27}.$$

Vậy : nếu $a = -\frac{71}{27}$ thì không tồn tại mặt phẳng (P) chứa (Δ_1) và song song với (Δ_2).

Nếu $a \neq -\frac{71}{27}$ thì mặt phẳng (P) chứa (Δ_1) song song với (Δ_2) có phương trình là : $-35x + 7(a + 3)y + 7(2 - a)z + a - 22 = 0$.

2. Để tồn tại mặt phẳng (Q) chứa (Δ_1) và vuông góc với (Δ_2) cần và đủ là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng này phải vuông góc với nhau nghĩa là : $(1; 1; 1).(a; 2; -3) = 0 \Leftrightarrow a + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Trong không gian Oxyz, lập phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm M(3; 2; –1) vuông góc Oy và cắt trục Oy.

ĐS : Đường thẳng (d) cắt trục Oy tại điểm N có tọa độ là (0; 2; 0) nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN} = (-3; 0; 1)$

Phương trình tham số của (d) là : $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}$.

02. Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm A(1; 3; –2) và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y - 5z + 1 = 0$.

a) Lập phương trình tham số của (Δ).

b) Tìm giao điểm của (Δ) và mặt phẳng (α) có phương trình :

$$4x + y + 2z - 6 = 0.$$

ĐS : a) Phương trình tham số của (Δ) : $\begin{cases} x = 1 = 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 5t \end{cases}$

b) Gọi M = (Δ) ∩ (α). Ta có M(–1; 4; 3).

03. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (m) có phương trình :

$$\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x = y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

a Tìm vectơ chỉ phương $\vec{v}$ của đường thẳng (m).

b Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A(2; 1; 1) và cắt đường thẳng (m) cho trước theo một góc vuông.

ĐS : a) Ta có : $\vec{v} = (1; 1; 1)$.

b) Mặt phẳng (α) đi qua A(2; 1; 1) và vuông góc với (m) có phương trình : $x + y + z - 4 = 0$.

Mặt phẳng (β) đi qua A và chứa (m) có phương trình : $x + 8y - 9z - 1 = 0$.

Ta có d = (α) ∩ (β) có phương trình : $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x + 8y - 9z - 1 = 0 \end{cases}$

04. Trong không gian cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) có phương trình tham số : (Δ_1) : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ (Δ_2) : $\begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = t' \end{cases}$.

a Chứng tỏ rằng (Δ_1) và (Δ_2) là hai đường thẳng chéo nhau.

b Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa (Δ_2) và song song với (Δ_1).

c) Tính khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2).

ĐS : a) Hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) lần lượt có hai vectơ chỉ phương là

$\vec{v_1} = (-1; 1; 1)$, $\vec{v_2} = (2; -1; 1)$.

Vậy $\vec{v_1}$ và $\vec{v_2}$ không cùng phương, do đó (Δ_1) và (Δ_2) không song song với nhau. Giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2) thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 1 - t = 2t' \\ t = 1 - t' \\ -t = t' \end{cases}$$

Hệ phương trình này vô nghiệm nên (Δ_1) và (Δ_2) không cắt nhau.

Từ suy ra (Δ_1) và (Δ_2) chéo nhau.

b) Mặt phẳng (P) chứa (Δ_2) và song song với (Δ_1) đi qua điểm (0; 1; 0) và nhận $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ làm cặp vectơ chỉ phương nên có phương trình là : $y + z - 1 = 0$.

c) Lấy điểm M(1; 0; 0) thuộc (Δ_1) ta có :

$$d(M, (P)) = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = d(\Delta_1, \Delta_2).$$

05. Cho hai đường thẳng chéo nhau (m), (n) có phương trình :

$$(m): \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad (n): \begin{cases} x = -3u \\ y = 3 + 2u \\ z = -2 \end{cases}.$$

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (m) và (n).

b) Viết phương trình đường vuông góc chung MN ($M \in m$, $N \in n$) của hai đường thẳng đã cho và tính tọa độ các điểm M, N.

ĐS : a) M(1; –2; 4), N(3; 1; –2)

$$d((m), (n)) = |\overrightarrow{MN}| = 7.$$

b) Đường vuông góc chung MN có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{-6}$.

06. Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt có phương trình :

$$(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{x}{1} \qquad (d_2): \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}.$$

a) Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A(0; 1; 1) và vuông góc với đường thẳng (d_1).

b) Tìm giao điểm của (α) với đường thẳng (d_2).

c) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm A vuông góc với (d_1) và cắt (d_2).

ĐS : a) Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) : $3x + y + z - 2 = 0$.

b) Gọi $B = (\alpha) \cap (d_2)$. Ta có B = (–1; 2; 3).

c) (Δ) là đường thẳng AB với $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình chính tắc là : $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$.

07. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian cách đều ba điểm A(1; 1; 1), B(–1; 2; 0), C(2; –3; 2).

ĐS : Tập hợp các điểm M trong không gian cách đều ba điểm A, B, C là đường thẳng (Δ) có phương trình :

$$(\Delta) : \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 & (MA = MB) \\ x - 4y + z - 7 = 0 & (MA = MC) \end{cases}.$$

08. Hãy xét vị trí tương đối của hai đường thẳng sau đây :

$$(d_1) : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{x}{3} \qquad (d_2) : \begin{cases} 3x = y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}.$$

ĐS : (d_1) có vectơ chỉ phương $\vec{v_1} = (1; -2; 3)$

(d_2) có vectơ chỉ phương $\vec{v_2} = (1; 2; 1)$

$\vec{v_1} . \vec{v_2} = 1 - 4 + 3 = 0$. Vậy $d_1 \perp d_2$

Phương trình tham số của đường thẳng d_1 : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t \end{cases}$

Giao điểm (nếu có) của (d_1) và (d_2) thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3t + (1 - 2t) - 5.3t + 1 = 0 \\ 2t + 3(1 - 2t) - 8.3t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14t + 2 = 0 \\ -24t + 6 = 0 \end{cases}.$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm nên (d_1) và (d_2) không cắt nhau. Vậy (d_1) và (d_2) chéo nhau và $(d_1) \perp (d_2)$.

09. Trong không gian cho đường thẳng (d_k) có phương trình :

$$\begin{cases} x + kz - k = 0 \\ (1 - k)x - ky = 0 \end{cases}; \text{ với k là một số tùy ý khác 0.}$$

Chứng minh rằng khi k thay đổi :

a) Đường thẳng (d_k) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng (d_k) luôn luôn thuộc một mặt phẳng.

HD : Ta viết lại hệ phương trình của (d_k) : $\begin{cases} x + k(z - 1) = 0 & (1) \\ x - k(x + y) = 0 & (2) \end{cases}$

- Khi k thay đổi, điểm cố định có tọa độ nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ z - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{điểm cố định } A(0; 0, 1).$$

- Lấy (1) – (2) ta có $k(x + y + z - 1) = 0$. Vậy (d_k) luôn luôn thuộc mặt phẳng cố định có phương trình : $x + y + z - 1 = 0$.

10. Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxyz, cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình : $\begin{cases} x - my + z - m = 0 \\ mx - y - mz - 1 = 0 \end{cases}$

a) Tính tọa độ giao điểm A của (d_m) với mặt phẳng (xOy).

b) Viết phương trình hình chiếu (d'_m) của (d_m) lên mặt phẳng (xOy).

c) Chứng minh rằng trong mặt phẳng (xOy), đường thẳng (d'_m) luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

HD :

a) Mặt phẳng (xOy) có phương trình z = 0. Vậy điểm A có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - my - z - m = 0 \\ mx - y - mz - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m}{1 + m^2} \\ y = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{2m}{1 + m^2} ; \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} ; 0\right)$$

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_m) và vuông góc với (xOy), (α) có hai vectơ chỉ phương là :

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix}\right) = (m^2 - 1; 2m; m^2 + 1)$$

$$\vec{e_3} = (0; 0; 1).$$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) ta có :

$$\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{e_3} = (2m; 1 - m^2; 0).$$

Do đó (d'_m) có phương trình : $\begin{cases} 2mx + (1 - m^2)\, y - m^2 + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

c) Khi m thay đổi, (d'_m) luôn luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính

$$R = \frac{m^2 + 1}{\sqrt{4m^2 + (1 - m^2)^2}} = 1.$$

Chuyên đề 10 : MẶT CẦU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TÂM I(a; b; c) BÁN KÍNH R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU CÒN CÓ DẠNG :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0 \quad \text{với } A^2 + B^2 + C^2 - D > 0.$$

Mặt cầu này có tâm I(–A; –B; –C), bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

3. MẶT CẦU ĐƯỜNG KÍNH AB LÀ TẬP HỢP NHỮNG ĐIỂM M SAO CHO $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

4. GIAO TUYẾN CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt cầu (S) : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

và mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$.

Khoảng cách từ tâm I(a; b; c) của mặt cầu đến mặt phẳng (α) là :

$$d = \frac{|aA + bB + cC + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

a) $d < R \Rightarrow$ (α) cắt (S) theo một đường tròn tâm H, là hình chiếu của I xuống (α), có bán kính $r = \sqrt{d^2 - R^2}$.

b) $d = R \Rightarrow$ (α) tiếp xúc với (S).

c) $d > R \Rightarrow$ (α) không cắt (S).

5. MẶT PHẲNG TIẾP XÚC MẶT CẦU TẠI $M(X_0; Y_0; Z_0)$ THUỘC MẶT CẦU

- Mặt cầu (S) có phương trình : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ và $M(x_0; y_0; z_0) \in (S)$.
- Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm $(x_0; y_0, z_0)$ thuộc mặt cầu : $(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) = R^2$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 : LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. PHƯƠNG PHÁP

- Sử dụng phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ sau khi biết tâm I(a; b; c) và bán kính R của mặt cầu.
- Sử dụng phương trình dạng : $x^2 + y^2 + c^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$, dựa vào điều kiện của bài toán để tìm các hệ số A, B, C, D.

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1

Lập phương trình mặt cầu (S) trong các trường hợp sau :

a) (S) có tâm I(–1; 2; 3) và đi qua điểm M(1; 0; 1).

b) (S) có đường kính là AB với A(4; –3; 7), B(2; 1; 3).

Giải

a) Ta có M ∈ (S) và $R^2 = IM^2 = (1 + 1)^2 + (0 - 2)^2 + (1 - 3)^2 = 12$

Phương trình mặt cầu là : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 12$.

b) Tâm I của (S) là trung điểm I của đoạn AB. Ta có I(3; –1; 5).

Bán kính $R = IB = \sqrt{(2-3)^2 + (1+1)^2 + (3-5)^2} = 3$

Vậy phương trình của mặt cầu là : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 9$.

Chú ý : *Có thể giải câu b như sau :*

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 2) + (y + 3)(y - 10) + (z - 7)(z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 10z + 26 = 0.$

Ví dụ 2

Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm : A(0; 0; 0), B(0; 0; 4), C(0; 4; 0), D(4; 0; 0).

Giải

Phương trình mặt cầu có dạng : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Vì mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C nên a, b, c, R là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2 & (1) \\ a^2 + b^2 + (4-c)^2 = R^2 & (2) \\ a^2 + (4-b)^2 + c^2 = R^2 & (3) \\ (4-a)^2 + b^2 + c^2 = R^2 & (4) \end{cases}$$

Từ (2) ta có : $(4 - c)^2 - c^2 = 0 \Rightarrow c = 2$.

Tương tự ta tính được : a = b = 2.

Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là : $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 12$.

Ví dụ 3

Mặt cầu có tâm nằm trên đường thẳng (d) : $\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng song song là (α) và (β) :

$(\alpha) : x + 2y - 2z - 2 = 0;$ $(\beta) : x + 2y - 2z + 4 = 0.$

Hãy lập phương trình mặt cầu đó.

Giải

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d) với (α) và (β).

Tọa độ của giao điểm A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 & (1) \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 & (2) \\ x + 2y - 2z - 2 = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow A(2;\ 1;\ 1)$$

Tọa độ giao điểm B là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-4;\ 5;\ 5).$$

Vì các mặt phẳng đã cho song song với nhau nên tâm I của mặt cầu là trung điểm của đoạn AB. Ta có : $I(-1;\ 3;\ 3)$

Bán kính R của mặt cầu bằng khoảng cách từ I tới (α) hoặc (β) :

$$R = d(I, (\alpha)) = \frac{|-1 + 6 - 6 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 1$$

Phương trình mặt cầu cần tìm là : $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

Ví dụ 4

Lập phương trình mặt cầu có tâm là $I(1;\ 4;\ -7)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha) : 6x + 6y - 7z + 42 = 0$.

Giải

Bán kính R của mặt cầu bằng khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng :

$$d(I, (\alpha)) = R = \frac{|6.1 + 6.4 - 7(-7) + 42|}{\sqrt{6 + 6^2 + 7^2}} = \frac{121}{11} = 11$$

Vậy mặt cầu có phương trình là : $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 7)^2 = 121$.

Ví dụ 5

Gọi G là đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) có phương trình :
$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ và mặt phẳng $2x - 2y - z + 9 = 0$.
Hãy xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn G.

Giải

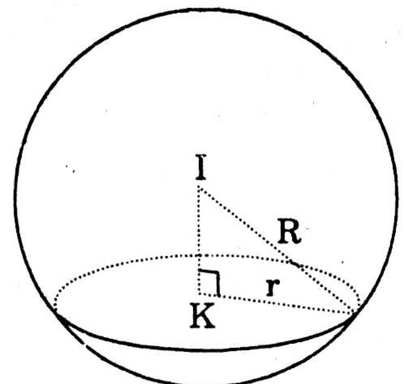
Mặt cầu (S) có tâm là $I(3;\ -2;\ 1)$ và có bán kính $R = 10$.

Gọi r là bán kính đường tròn G và h là khoảng cách từ I đến mặt phẳng đã cho.

Ta có : $h = \dfrac{|2.3 - 2(-2) - 1 + 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 6$.

Mặt khác ta có :

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$



Phương trình đường thẳng qua tâm I của mặt cầu và vuông góc với mặt phẳng đã cho là :

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1} \text{ hay } \begin{cases} x = 3+2t \\ y = -2-2t \\ z = 1-t \end{cases}.$$

Thay các giá trị của x, y, z vào phương trình mặt phẳng, ta có :

$$2(3 + 2t) - 2(-2 - 2t) - (1 - t) + 9 = 0 \Rightarrow t = -2.$$

Vậy tọa độ tâm K của đường tròn G là K(–1; 2; 3).

Ví dụ 6

Cho mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0.$$

a) Xác định tâm và bán kính của mặt cầu (S).

b) Lập phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai đường thẳng (d_1), (d_2) lần lượt có phương trình :

$$(d_1): \frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+13}{2}; \qquad (d_2): \begin{cases} x = -7+3t \\ y = -1-2t \\ z = 8 \end{cases}.$$

Giải

a) Ta có thể viết phương trình mặt cầu (S) dưới dạng sau đây :

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + (z + 13)^2 - 5^2 - 1^2 - 13^2 - 113 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 5)^2 + (y + 1)^2 + (z + 13)^2 = 308.$$

Mặt cầu (S) có tâm là I(5; –1; 13) và có bán kính $R = \sqrt{308}$.

b) Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu và song song với hai đường thẳng đã cho nên có hai vectơ chỉ phương là : $\vec{v_1} = (2; -3; 2)$; $\vec{v_2} = (3; -2; 0)$.

Do đó mặt phẳng (P) cần tìm có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (4; 6; 5).$$

Ta có phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là : $4x + 6y + 5z + D = 0$.

Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) là khoảng cách từ tâm I(5; –1; –13) đến mặt phẳng bằng bán kính R của mặt cầu.

Do đó : $\dfrac{|4.5 + 6(-1) + 5(-13) + D|}{\sqrt{16+36+25}} = \sqrt{308}$

$$|D - 51| = 154 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D_1 = -103 \\ D_2 = 205 \end{array}\right.$$

Vậy hai mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình :

$$4x + 6y + 5z - 103 = 0 \text{ và } 4x + 6y + 5z + 205 = 0.$$

Ví dụ 7

Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm là I(2; 3; −1) cắt đường thẳng

$$(d):\begin{cases}5x-4y+3z+20=0\\3x-4y+z-8=0\end{cases}.$$

Tại hai điểm A, B sao cho AB = 16.

Giải

Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương

$$\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}-4&3\\-4&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&5\\1&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}5&-4\\3&-4\end{vmatrix}\right)=(8;4;-8).$$

Ta lấy $\vec{v'}=(2;1;-2)$ cùng phương với $\vec{v}$

Mặt phẳng (P) đi qua tâm I và vuông góc với d có phương trình :

$$2(z-2)+(y-3)-2(z+1)=0\Leftrightarrow 2x+y-2z-9=0.$$

Gọi H = (d) ∩ (P). Tọa độ của H nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases}5x-4y+3z+20=0\\3x-4y+z-8=0\ \Rightarrow H(-3;-7;-11)\\2x+y-2z-9=0\ \Rightarrow \overrightarrow{IH}=(-5;-10;10)\Rightarrow IH^2=225\end{cases}.$$

Vậy : $R^2=IH^2+\dfrac{AB^2}{4}=225+64=289$

Phương trình mặt cầu (S) là : $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289.$

Ví dụ 8

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có các phương trình tương ứng : (P) : $2x-3y+4z-5=0$

(S) : $x^2+y^2+z^2+3x+4y-5z+6=0.$

1. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

2. Tính khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P). Từ đó suy ra rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn mà ta kí hiệu là (C). Xác định bán kính r và tọa độ tâm H của đường tròn (C).

(ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2000)

Giải

1. Ta có thể viết phương trình mặt cầu (S) dưới dạng :

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{26}{4}$$

Mặt cầu (S) có tọa độ tâm $I\left(-\frac{3}{2};-2;\frac{5}{2}\right)$ và có bán kính $R=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

2. Khoảng cách d từ tâm I đến mặt phẳng (P) là :

$$d = \frac{\left|2.\left(-\frac{3}{2}\right) - 3(-2) + 4.\frac{5}{2} - 5\right|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{8}{\sqrt{29}}$$

Ta có : $d = IH = \frac{8}{\sqrt{29}}$ nên $IH^2 = \frac{64}{29}$ và $R^2 = \frac{26}{4}$,

vì $IH^2 > R^2$ ta suy ra khoảng cách IH từ I tới mặt phẳng (P) bé hơn bán kính R của mặt cầu. Do đó mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) tâm H, bán kính r.

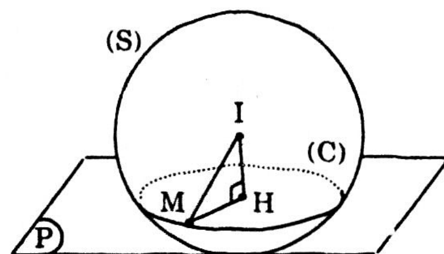
Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (C), ta có IM = R và HM = r.

$$IM^2 = IH^2 + HM^2$$

$$R^2 = IH^2 + r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = R^2 - IH^2 = \frac{26}{4} - \frac{64}{29}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{249}{58}}$$



Gọi m là đường thẳng đi qua tâm I của mặt cầu vuông góc với mặt phẳng (P) tại H. Giao điểm H của m với (P) là tâm của đường tròn (C). Đường thẳng m nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) làm vectơ chỉ phương. Ta có : $\vec{n} = (2; -3; 4)$

Do đó đường thẳng m có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = \frac{5}{2} + 4t \end{cases}$

Muốn tìm tọa độ giao điểm H, ta giải phương trình sau :

$$2\left(-\frac{3}{2} + 2t\right) - 3(-2 - 3t) + 4\left(\frac{5}{2} + 4t\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow 23t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{8}{29}$$

Ta tính được tọa độ tâm H của đường tròn (C) là :

$$H : \begin{cases} x = -\frac{3}{2} - \frac{16}{29} = -\frac{87}{58} \\ y = -2 + \frac{24}{29} = -\frac{34}{29} \\ z = \frac{5}{2} - \frac{32}{29} = \frac{81}{58} \end{cases}$$

Vậy : $H\left(-\frac{87}{58}; -\frac{34}{29}; \frac{81}{58}\right)$

Ví dụ 9

Lập phương trình mặt cầu đi qua điểm M(0; 0; 3) và đi qua đường tròn trong không gian có phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 = 0 \\ 2x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$

Giải

Đường tròn đã cho là giao tuyến của mặt cầu với mặt phẳng. Do đó mặt cầu đi qua đường tròn trên có phương trình dạng :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 + \lambda(2x + 2y - z + 4) = 0 \quad (1)$$

Vì mặt cầu đi qua điểm M(0; 0; 3) nên tọa độ của M phải nghiệm đúng phương trình mặt cầu, nghĩa là :

$$9 - 12 - 40 + \lambda(-3 + 4) = 0 \Rightarrow \lambda = 43$$

Thay giá trị của λ vào phương trình (1), ta có phương trình mặt cầu là :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 88x + 82y - 47z + 132 = 0.$$

Ví dụ 10

Lập phương trình mặt cầu có bán kính R = 3 và tiếp xúc với mặt phẳng (α) : 2x + 2y −z − 5 = 0 tại điểm H(1; 1; −1) thuộc (α).

Giải

Đường thẳng (d) đi qua H và vuông góc với mặt phẳng (α) nhận vectơ pháp tuyến cuả (α) làm vectơ chỉ phương, có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}.$$

Tâm I của mặt cầu cần tìm nằm trên đường thẳng (d) và cách H một đoạn HI = 3. Gọi $(x_I; y_I; z_I)$ là tọa độ của điểm I ứng với các giá trị t_I. Ta có :

$$\begin{cases} x_I = 1 + 2t_I \\ y_I = 1 + 2t_I \\ z_I = -1 - t_I \end{cases}.$$

Ta có : $|\overrightarrow{HI}| = \sqrt{(1 + 2t_I - 1)^2 + (1 + 2t_I - 1)^2 + (-1 - t_I + 1)^2} = 3$

$= \sqrt{9t_I^{\,2}} = 3 \Rightarrow t_I = \pm 1.$

Với t = 1, ta có tâm I_1 : $\begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = -1 - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow I_1(3; 3; -2)$

Với t = −1, ta có tâm I_2 : $\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I_2(-1; -1; 0)$

Vậy hai mặt cầu cần tìm có phương trình là :

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + z + 2)^2 = 9.$$

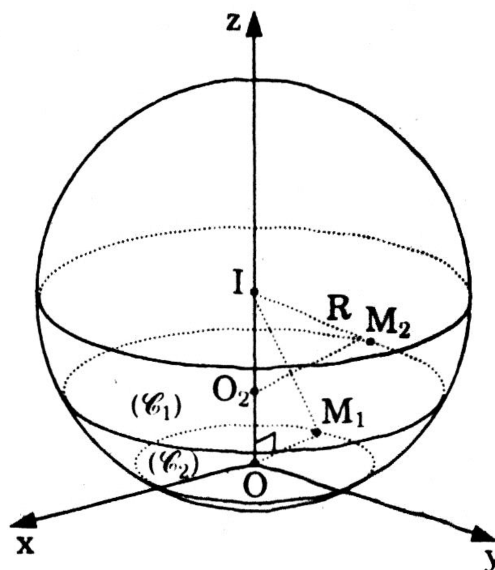
$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 3^2 = 9.$$

Ví dụ 11

Lập phương trình mặt cầu đi qua hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ lần lượt có phương trình sau đây :

$$(\mathscr{C}_1) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad (\mathscr{C}_2) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$$

Giải



Đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ là giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 = 9$ và mặt phẳng $z = 0$. Đường tròn này có tâm là điểm gốc tọa độ O(0; 0; 0) có bán kính $R_1 = 3$. Đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ là giao tuyến của mặt cầu : $x^2 + y^2 = 25$ và mặt phẳng $z = 2$. Đường tròn này có tâm là điểm $O_2(0; 0; 2)$ có bán kính $R_2 = 5$.

Vậy tâm I của mặt cầu cần tìm phải nằm trên đường thẳng OO_2 nghĩa là nằm trên trục Oz và có tọa độ I(0; 0; z). Ta cần tính giá trị của z.

Gọi R là bán kính của mặt cầu cần tìm, ta lấy các điểm M_1; M_2 lần lượt thuộc $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

Ta có : $IM_1^2 = R^2 = OI^2 + R_1^2 = z^2 + 9$ (1)

$IM_2^2 = R^2 = O_2I^2 + R_2^2 = (z - 2)^2 + 25$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $z^2 + 9 = (z - 2)^2 + 25$

$$\Leftrightarrow z^2 + 9 = (z - 2)^2 + 25 = z^2 - 4z + 4 + 25$$

$$\Rightarrow 4z = 20 \Leftrightarrow z = 5 \text{ và } R^2 = 34$$

Vậy mặt cầu cần tìm có tâm I(0; 0; 5) và có bán kính $R = \sqrt{34}$.

Do đó, mặt cầu đi qua $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ có phương trình là :

$$x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 34.$$

Vấn đề 2 : MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT CẦU

A. PHƯƠNG PHÁP

Muốn lập phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu tâm I(a; b; c) bán kính R tại điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt cầu ta thực hiện.

- **Cách 1 :**

– Tìm vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM_0}$ của mặt phẳng.

– Dùng điều kiện $M_0 \in (\alpha)$ để tìm hệ số D trong phương trình mặt phẳng.

- **Cách 2 :**

Dùng công thức phân đôi tọa độ, ta viết được phương trình mặt phẳng tiếp xúc

– Nếu mặt cầu có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ ta dùng công thức :

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) = R^2.$$

– Nếu mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ ta dùng công thức :

$$x_0x + y_0y + z_0z + A(x_0 + x) + B(y_0 + y) + C(z_0 + z) + D = 0.$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Lập phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$ tại điểm $M_0(7; -1; 5)$.

Giải

Mặt cầu (S) có tâm là I(1; –3; 2a). Gọi (α) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M_0, ta có : $\overrightarrow{IM_0} = (6; 2; 3)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) cần tìm.

Vậy (α) có phương trình dạng : $6x + 2y + 3z + D = 0$.

Vì $M_0(7; -1; 5)$ thuộc mặt phẳng (α) nên ta có :

$$42 - 2 + 15 + D = 0 \Rightarrow D = -55.$$

Vậy mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M_0 là :

$$6x + 2y + 3z - 55 = 0.$$

- **Cách khác** : Áp dụng công thức phân đôi tọa độ, ta có phương trình mặt phẳng (α) là :

$$(x + 1)(7 - 1) + (y + 3)(-1 + 3) + (z - 2)(5 - 2) = 49$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2y + 3z - 55 = 0.$$

❑ **Chú ý :** *Công thức phân đôi tọa độ chỉ được áp dụng khi điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt cầu tiếp xúc.*

Ví dụ 2

Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$ tại điểm $M_0(4; 3; 0)$ thuộc (S).

Giải

Mặt cầu (S) có phương trình dạng :

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2-9-1-4+5=0$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)=9.$$

Vậy (S) có tâm là điểm I(3; 1; –2) và có bán kính AR = 3.

Gọi (α) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M_0(4; 3; 0)$.

Ta có vectơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{IM_0} = (1; 2; 2)$. Do đó phương trình của mặt phẳng (α) có dạng : $x + 2y + 2z + D = 0$.

Vì $M_0(4; 3; 0)$ thuộc (α) nên : $4 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -10$

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình : $x + 2y + 2z - 10 = 0$

- **Cách khác :** Áp dụng công thức phân đôi tọa độ, ta có phương trình của (α) là : $4x + 3y + 0.z - 3(x+4) - (y+3) + 2(z+0) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y + 2z - 10 = 0.$

Ví dụ 3

Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$$

và chứa đường thẳng (d) : $\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$

Giải

Mặt phẳng chứa đường thẳng (d) thuộc chùm mặt phẳng :

$$m(8x - 11y + 8z - 30) + n(x - y - 2z) = 0.$$

Chọn m = 1 ta có : $(8+n)x - (11+n)y + 2(4-n)z - 30 = 0$

Viết lại phương trình mặt cầu (S) ta có :

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 29.$$

Mặt cầu này có tâm I(–1; 3; –2) và có bán kính $R = \sqrt{29}$. Muốn cho mặt cầu kép tiếp xúc với mặt phẳng thì khoảng cách từ tâm I(–1; 3; –2) đến mặt phẳng phải bằng bán kính $R = \sqrt{29}$, nghĩa là :

$$\frac{|-(8+n) - 3(11+n) - 4(4-n) - 30|}{\sqrt{(8+n)^2(11+n)^2 + 4(4-n)^2}} = \sqrt{29}.$$

$$\Leftrightarrow 87^2 = 29(6n^2 + 6n + 249) \Leftrightarrow 6n^2 + 6n + 249 = \frac{87^2}{29} = 261$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 2 = 0 \Rightarrow n_1 = 1, n_2 = 2.$$

Vậy hai mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu là : $3x - 4y + 2z - 10 = 0 \quad (\alpha_1)$

$2x - 3y + 4z - 10 = 0 \quad (\alpha_2)$

Ví dụ 4

Lập phương trình mặt cầu đi qua điểm A(1; –1; 4) và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

Giải

Các mặt phẳng tọa độ chia không gian ra làm 8 phần. Vì mặt cầu cần tìm tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ và đi qua điểm A(1; –1; 4) nên phải có tâm nằm trong phần không gian có chứa điểm A.

Vậy tâm I của mặt cầu có tọa độ là I(R; –R; R). Do đó phương trình mặt cầu có dạng : $(x - R)^2 + (y + R)^2 + (z - R)^2 = R^2$.

Vì điểm A(1; –1; 4) nằm trên mặt cầu nên có tọa độ nghiệm đúng phương trình mặt cầu, nghĩa là :

$$(1 - R)^2 + (-1 + R)^2 + (4 - R)^2 = R^2$$

$$2R^2 - 12R + 18 = 0 \Leftrightarrow R^2 - 6R + 9 = 0$$

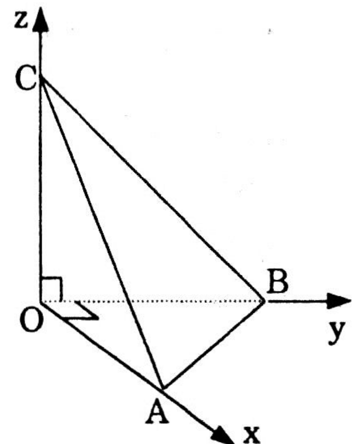
$$\Leftrightarrow (R - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow R = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu là : $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

Ví dụ 5

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho các điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1). Lập phương trình mặt cầu nội tiếp trong tứ diện OABC.

Giải



Các mặt của tứ diện có phương trình lần lượt là :

$x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ và $x + y + z = 1$

Tâm I của mặt cầu nội tiếp trong tứ diện nên có tọa độ là : I(a, b, c) với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

và $a + b + c - 1 < 0$.

Khoảng cách từ tâm I đến các mặt cầu của tứ diện là : a, b, c và $\frac{|1 - (a + b + c)|}{\sqrt{3}}$.

Trong đó mặt phẳng (ABC) có phương trình là :

$$1 - (x + y + z) = 0.$$

Ta có : $a = b = c = \frac{1 - (a + b + c)}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{1 - 3a}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$.

Vậy tâm I có tọa độ là $I\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}; \frac{3 - \sqrt{3}}{6}; \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)$ và bán kính của mặt cầu là $R = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$.

Do đó mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC có phương trình là :

$$\left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2.$$

Vấn đề 3 : GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT CẦU

A. PHƯƠNG PHÁP

Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) lần lượt có tâm I_1, I_2, có bán kính R_1, R_2 và có phương trình :

$$(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 + 2A_1x + 2B_1y + 2C_1z + D_1 = 0 \quad (1)$$

$$(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 + 2A_2x + 2B_2y + 2C_2z + D_2 = 0 \quad (2)$$

Giao tuyến của (S_1) và (S_2) nếu có là nghiệm của hệ hai phương trình (1) và (2). Hệ đó tương đương với hệ hai phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2A_1x + 2B_1y + 2C_1z + D_1 = 0 & (S_1) \\ 2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + 2(C_1 - C_2)z + (D_1 - D_2) = 0 & (\alpha) \end{cases} \quad (3)$$

Vậy giao tuyến của (S_1) và (S_2) cũng là giao tuyến của (S_1) và mặt phẳng (α).

Mặt phẳng (α) vuông góc với đường nối tâm I_1I_2 của (S_1) và (S_2).

Do đó giao tuyến của (S_1) và (S_2) là đường tròn tâm H hình chiếu của tâm I_1 (hoặc I_2) xuống mặt phẳng (α) và có bán kính $r = \sqrt{R_1^2 - I_1H^2}$.

Nếu $I_1I_2 < R_1 + R_2$: (S_1) và (S_2) cắt nhau.

Nếu $I_1I_2 = R_1 + R_2$: (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài.

Nếu $I_1I_2 > R_1 + R_2$: (S_1) và (S_2) không cắt nhau.

Nếu $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$: (S_1) và (S_2) tiếp xúc trong.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Xác định giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) lần lượt có phương trình sau đây : $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

$(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z + 23 = 0.$

Giải

Phương trình các mặt cầu (S_1) và (S_2) có thể được viết dưới dạng sau đây :

$$(S_1) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$$

$$(S_2) : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 4.$$

Như vậy mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1; 1; 1)$ và có bán kính $R_1 = 3$, còn mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(3; 3; 3)$ và có bán kính $R_2 = 2$.

Do đó $\overrightarrow{I_1I_2} = (2; 2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{I_1I_2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} < R_1 + R_2$.

Vậy hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau theo đường tròn giao tuyến $(\mathscr{C})$ có phương trình là hệ phương trình gồm hai mặt cầu đã cho

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z + 23 = 0 \end{cases}$$

Giao tuyến của (S_1) và (S_2) cũng là giao tuyến của (S_1) và mặt phẳng (α) (hoặc của (S_2) với mặt phẳng (α)) :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0 \\ 4x + 4y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$$

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là : $\vec{n} = (4; 4; 4)$ hay $\vec{n'} = (1; 1; 1)$.

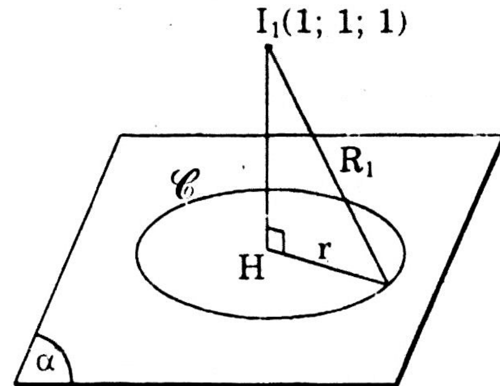
Do đó đường thẳng $I_1I_2 \perp (\alpha)$ có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Giao điểm $H = I_1I_2 \cap (\alpha)$ có tọa độ là :

$4(1 + t) + 4(1 + t) + 4(1 + t) - 29 = 0$

$12t - 17 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{17}{12}$

$$\begin{cases} x_H = 1 + \dfrac{17}{12} = \dfrac{29}{12} \\ y_H = 1 + \dfrac{17}{12} = \dfrac{29}{12} \\ z_H = 1 + \dfrac{17}{12} = \dfrac{29}{12} \end{cases}$$



$\Rightarrow H\left(\dfrac{29}{12}; \dfrac{29}{12}; \dfrac{29}{12}\right)$.

Do đó : $\overrightarrow{I_1H} = \left(\dfrac{17}{12}; \dfrac{17}{12}; \dfrac{17}{12}\right)$.

$$|\overrightarrow{I_1H}| = \sqrt{\frac{17^2 + 17^2 + 17^2}{12^2}} = \frac{\sqrt{17^2}}{4\sqrt{3}} = \frac{17}{4\sqrt{3}}.$$

Đường giao tuyến $(\mathscr{C})$ có bán kính $r = \sqrt{R_1^2 - I_1H^2}$.

Do đó $r = \sqrt{9 - \left(\dfrac{17}{4\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{9 - \dfrac{287}{48}} = \sqrt{\dfrac{145}{48}}$.

Ví dụ 2

Xác định giao tuyến của hai mặt cầu sau đây :

$(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 64 = 0$

$(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 12z + 72 = 0$.

Giải

- Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(0; 0; 0)$ bán kính $R_1 = 8$.
- Phương trình mặt cầu (S_2) có thể viết như sau :

$$(x - 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 6)^2 = 3^2.$$

Mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(3; 6; -6)$ và có bán kính $R_2 = 3$.

Ta có : $\overrightarrow{I_1I_2} = (3; 6; -6)$. Đường thẳng I_1I_2 có vectơ chỉ phương : $\vec{a} = (1; 2; -2)$.

Hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau theo đường tròn giao tuyến $(\mathscr{C})$ (nếu có) có phương trình là :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 64 = 0 & (S_1) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 12z + 72 = 0 & (S_2) \end{cases}$$

Hệ phương trình trên tương đương với với hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 64 = 0 \\ 6x + 12y - 12z - 136 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 64 = 0 & (S_1) \\ 3x + 6y - 6z - 68 = 0 & (\alpha) \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{I_1I_2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9 < R_1 + R_2 = 8 + 3$

Vậy hai mặt cầu cắt nhau theo giao tuyến được biểu thị bằng hệ phương trình nói trên, gồm phương trình biểu thị mặt cầu (S_1) và phương trình biểu thị mặt phẳng (α).

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{a} = (1; 2; -2)$.

Đường thẳng $I_1I_2 \perp (\alpha)$ có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}$.

Gọi $H = I_1I_2 \cap (\alpha)$, ta có tọa độ của H là :

$$3t + 6.2t - 6(-2t) - 68 = 0 \Leftrightarrow 27t - 68 = 0 \Rightarrow t = \frac{68}{27}$$

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{68}{27} \\ y_H = -\dfrac{136}{27} \\ z_H = -\dfrac{136}{27} \end{cases} \Rightarrow H = \left(\frac{68}{27}; \frac{136}{27}; -\frac{136}{27}\right)$$ là tâm đường tròn giao tuyến $(\mathscr{C})$

$$\overrightarrow{I_1H} = \left(\frac{68}{27}; \frac{136}{27}; -\frac{136}{27}\right) \Rightarrow \quad |\overrightarrow{I_1H}| = \frac{\sqrt{41616}}{\sqrt{27^2}} = \frac{\sqrt{4624}}{9}.$$

Đường tròn giao tuyến $(\mathscr{C})$ có bán kính

$$r = \sqrt{R_1{}^2 - I_1H^2} = \sqrt{64 - \frac{4624}{81}} = \frac{\sqrt{560}}{9} = \frac{4\sqrt{35}}{9}.$$

Đường tròn $(\mathscr{C})$ nằm trong mặt phẳng (α) có phương trình

$$3x + 6y - 6z - 68 = 0.$$

C. CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP

Bài 1

Cho mặt cầu (S) có phương trình đối với hệ trục Oxyz là :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z - 35 = 0.$$

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu (S).

b) Xác định tọa độ giao điểm của mặt cầu (S) với đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(2; –4; 8); B(0; –2; 10).

c) Xác định phương trình giao tuyến của mặt phẳng (OAB) với mặt cầu (S).

Giải

a) Có thể viết phương trình mặt cầu (S) dưới dạng :

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 3)^2 = 45.$$

Mặt cầu S có tọa độ tâm I(1; 0; 3) và có bán kính $R = \sqrt{45}$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm A(2; –4; 8) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 2)$.

Chọn $\vec{a} = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương cho d ta có phương trình tham số của đường thẳng AB là : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -4 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$.

Giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu xác định bởi :

$$(1 - t)^2 + (-4 + t)^2 + (5 + t)^2 - 45 = 0$$

$$1 - 2t + t^2 + 16 - 8t + t^2 + 25 + 10t + t^2 - 45 = 0$$

$$3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Với : t = 1 ta có giao điểm M(1; –3; 9).

t = – 1 ta có giao điểm N(3; –5; 7).

c) Mặt phẳng (OAB) nhận $\overrightarrow{OA} = (2; -4; 8)$ và $\overrightarrow{OB} = (0; -2; 10)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = 2t_1 & (1) \\ y = -4t_1 - 2t_2 & (2) \\ z = 8t_1 + 10t_2 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $t_1 = \frac{x}{2}$ và từ (2) ta có $t_2 = -x - \frac{7}{2}$. Thay các giá trị của t_1 và vào (3) ta có phương trình tổng quát của mặt phẳng (OAB) là : $6x + 5y + 3 = 0$.

Do đó giao tuyến của mặt phẳng (OAB) và mặt cầu (S) là đường tròn có phương trình là : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z - 35 = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$

Bài 2

> Cho mặt cầu (S) có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0$
> và mặt phẳng (α) có phương trình : $4x + 3y + m = 0$.
> Biện luận theo m vị trí tương đối của (α) và (S).

Giải

Phương trình của (S) có thể viết dưới dạng :

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 2.$$

Vậy (S) có tâm là điểm I(1; 0; 1) và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ta có : $h = d(I, (\alpha)) = \dfrac{|4+0+m|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{|4+m|}{5}$

Xét : $f(m) = h^2 - R^2 = \dfrac{(m+4)^2}{25} - 2 = \dfrac{1}{25}(m^2 + 8m - 34)$

$\Delta' = 16 + 34 = 50.$

f(m) có hai nghiệm là : $m_1 = -4 - 5\sqrt{2}$; $m_2 = -4 + 5\sqrt{2}$.

Ta hãy xét các trường hợp sau đây :

a) Trường hợp $m < -4 - 5\sqrt{2}$ hay $m > -4 + 5\sqrt{2} \Rightarrow h > R$.

Khi đó mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu là $(\alpha) \cap (S) = \varnothing$.

b) Trường hợp $m = -4 - 5\sqrt{2}$ hay $m = -4 + 5\sqrt{2} \Rightarrow h = R$.

Khi đó mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm.

c) Trường hợp $-4 - 5\sqrt{2} < m < -4 + 5\sqrt{2} \Rightarrow h < R$.

Khi đó mặt phẳng (α) cắt (S) theo một đường tròn ($\mathscr{C}$) có phương trình là :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0 \\ 4x + 3y + m = 0 \end{cases}$$

Bài 3

> Trong không gian với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz, cho tứ diện ABCD biết A(1; 1; 1), B(1; 2; 1), C(1; 1; 2), D(2; 2; 1).
> a) Hãy lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.
> b) Tìm tâm và bán kính của mặt cầu ấy.

Giải

a) Phương trình của mặt cầu có dạng tổng quát là :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0.$$

Vì bốn điểm A, B, C, D nằm trên mặt cầu nên tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình mặt cầu, nghĩa là :

$$\begin{cases} 1+1+1+2A+2B+2C+D=0 \\ 1+4+1+2A+4B+2C+D=0 \\ 1+1+4+2A+2B+4C+D=0 \\ 4+4+1+4A+4B+2C+D=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A+2B+2C+D=-3 \\ 2A+4B+2C+D=-6 \\ 2A+2B+4C+D=-6 \\ 4A+4B+2C+D=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{3}{2} \\ B=-\dfrac{3}{2} \\ C=-\dfrac{3}{2} \\ D=6 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là :

$$x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0.$$

b) Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD còn có dạng :

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

Ta suy ra (S) có tâm là điểm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ và có bán kính $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4

Trong không gian cho mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-11=0.$$

a) Xác định tâm và bán kính của mặt cầu (S).

b) Lập phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (α) có phương trình : $4x+3z-17=0$.

Giải

a) Phương trình mặt cầu (S) có thể viết dưới dạng

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25.$$

Ta suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$ và bán kính $R=5$.

b) Đường thẳng (d) đi qua tâm $I(3;-2;1)$ của mặt cầu và vuông góc với mặt phẳng (α) có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(4;0;3)$. Do đó đường thẳng (d) có phương trình tham số là : $\begin{cases} x=3+4t \\ y=-2 \\ z=1+3t \end{cases}$.

Giao điểm A, B của đường thẳng (d) với mặt cầu là các tiếp điểm cần tìm.

Ta có : $(3+4t-3)^2+(-2+2)^2+(1+3t-1)^2=25$

$\Leftrightarrow 25t^2=25 \Rightarrow t=\pm 1.$

Với t = 1, ta có tọa độ tiếp điểm A là : $\begin{cases} x_A = 3 + 4 = 7 \\ y_A = -2 \\ z_A = 1 + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow A(7; -2; 4).$

Với t = –1, ta có tọa độ tiếp điểm B là : $\begin{cases} x_B = 3 - 4 = -1 \\ y_B = -2 \\ z_B = 1 - 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-1; -2; -2).$

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại A(7; –2; 4) và song song với mặt phẳng (α) có phương trình dạng : $4x + 3z + D = 0$.

Vì $A \in (\alpha)$ nên : $28 + 12 + D = 0 \Rightarrow D = -40$.

Vậy mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm A có phương trình

$$4x + 3z - 40 = 0.$$

Tương tự, ta có phương trình với mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm B là : $4x + 3z + 10 = 0$.

Bài 5

Cho mặt cầu (S) có phương trình : $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - 4y - 4z - 1 = 0$ và mặt phẳng (α) có phương trình : $4x + 4y + 2z - 1 = 0$

a) Chứng tỏ rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S).

b) Xác định tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến ($\mathscr{C}$).

Giải

a) Phương trình mặt cầu (S) có thể viết dưới dạng :

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Ta suy ra mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và bán kính R = 1. Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) là : $d(I, (\alpha)) = \frac{|2 + 2 + 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Vì $d(I, (\alpha)) = \frac{2}{3} < R = 1$ nên mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S).

b) Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4; 4; 2)$ hay $\vec{n'} = (2; 2; 1)$.

Đường thẳng (d) đi qua tâm I của mặt cầu và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2t \\ y = \frac{1}{2} + 2t \\ z = \frac{1}{2} + t \end{cases}$.

Gọi $H = (d) \cap (\alpha)$ ta có :

$$4\left(\frac{1}{2}+2t\right)+4\left(\frac{1}{2}+2t\right)+2\left(\frac{1}{2}+2t\right)-1=0 \Leftrightarrow 4+18t=0 \Rightarrow t=-\frac{2}{9}.$$

Tìm tọa độ giao điểm H :

$$H:\begin{cases} x_H = \frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18} \\ y_H = \frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18} \\ z_H = \frac{1}{2}-\frac{2}{9}=\frac{5}{18} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{1}{18};\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right).$$

$$\text{Gọi : } d = \left|\overrightarrow{HI}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{18}\right)} = \sqrt{\frac{144}{324}} = \frac{2}{3}.$$

Đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm $H\left(\frac{1}{18};\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right)$ và bán kính $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Bài 6

Cho hai mặt cầu (S) và (S') lần lượt có phương trình :

$$(S): 2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5=0$$

$$(S'): x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1=0.$$

a) Xác định tâm và bán kính của (S) và (S').

b) Lập phương trình đường nối tâm của hai mặt cầu đó.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt cầu (S) và (S') và mặt phẳng chứa giao tuyến đó. Chứng tỏ rằng mặt phẳng này vuông góc với đường nối tâm của hai mặt cầu đã cho.

Giải

a) Ta có thể viết phương trình mặt cầu (S) dưới dạng sau đây :

$$x^2+y^2+z^2+\frac{3}{2}x-y+\frac{z}{2}-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{8}.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ và bán kính $R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

Phương trình mặt cầu (S') có thể viết dưới dạng :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{5}{2}.$$

Vậy mặt cầu (S') có tâm $I'\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2};1\right)$ và có bán kính $R' = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

b) Ta có $\overrightarrow{II'} = \left(\frac{5}{4}; -2; \frac{5}{4}\right)$, do đó đường nối tâm có vectơ chỉ phương $\vec{v} = 4\overrightarrow{II'} = (5; -8; 5)$ và có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = -\frac{3}{4} + 5t \\ y = \frac{1}{2} - 8t \\ z = -\frac{1}{4} + 5t \end{cases}$.

c) Giao tuyến của hai mặt cầu (S), (S') được xác định bởi phương trình sau :

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0 & (1) \\ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 6y - 4z + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Hệ này tương đương với hệ phương trình sau đây :

(Lấy (1) – (2) ta được (4))

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0 & (3) \\ 5x - 8y + 5z - 7 = 0 & (4) \end{cases}$$

Hệ phương trình gồm (3) và (4) biểu thị giao tuyến của một mặt cầu với một mặt phẳng. Giao tuyến đó là đường tròn nằm trong mặt phẳng

$(\alpha) : 5x - 8y + 5z - 7 = 0$.

Ta có : $d(I, (\alpha)) = \dfrac{\left|5.\left(-\frac{3}{4}\right) - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{4}\right) - 7\right|}{\sqrt{5^2 + 8^2 + 5^2}} = \dfrac{13,5}{\sqrt{114}} < \dfrac{3\sqrt{6}}{2} = R$ nên mặt phẳng cắt mặt cầu. Mặt phẳng này có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -8; 5)$ nên vuông góc với đường nối tâm II' vì $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{II'}$.

Bài 7

Cho mặt cầu (S) có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z + 62 = 0$.

a) Xác định tâm và bán kính của mặt cầu (S).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng d đi qua tâm mặt cầu và nhận $\vec{a} = (4; 6; 9)$ làm vectơ chỉ phương.

c) Lập phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại các giao điểm nói trên.

Giải

a) Ta có thể viết phương trình mặt cầu (S) dưới dạng sau :

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + (z + 13)^2 = 133.$$

Do đó ta suy ra tọa độ tâm I(5; –1; –13) của (S) và bán kính $R = \sqrt{133}$.

b) Ta có phương trình tham số của đường thẳng d là :

$$\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -1 + 6t \\ z = -13 + 9t \end{cases}$$

Thay các giá trị này vào phương trình mặt cầu ta có :

$$(5 + 4t - 5)^2 + (-1 + 6t + 1)^2 + (-13 + 9t + 13)^2 = 133$$

$$\Leftrightarrow 133t^2 = 133 \Rightarrow t = \pm 1.$$

Với : $t = 1$ ta có tọa độ giao điểm A (9; 5; -4).

$t = -1$ ta có tọa độ giao điểm B(1; -7; -22).

c) Các mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu S tại A và B đều nhận vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; 6; 9)$ làm vectơ pháp tuyến. Do đó phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại các giao điểm A và B có dạng $4x + 6y + 9z + D = 0$.

A(9; 5; -4) thuộc mặt phẳng nên $4.9 + 6.5 + 9(-4) + D = 0 \Rightarrow D = -30$.

B(1; -7; -22) thuộc mặt phẳng nên $4.1 + 6(-7) + 9(-22) + D = 0 \Rightarrow D = 236$.

Vậy các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại A và B có phương trình là :

Tại A : $4x + 6y + 9z - 30 = 0$.

Tại B : $4x + 6y + 9z + 236 = 0$.

Bài 8

Trong không gian với hệ trục Oxyz cho điểm A(1; 4; -1).

a) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm O, bán kính OA.

b) Gọi B là điểm có tọa độ (1; y; 1). Tìm y để $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.

c) Viết phương trình mặt cầu (T) tâm B, bán kính BA.

d) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (T) và chứa trục Ox.

Giải

a) Ta có $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1^2 + (4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}$.

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là : $x^2 + y^2 + z^2 = 18$.

b) Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 4; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (0; y - 4; -2)$

$$\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = 4(y - 4) - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2} \text{ thì } \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}.$$

c) Ta có tọa độ điểm B là $\left(1; \frac{9}{2}; 1\right)$. Mặt cầu (T) có bán kính

$$R' = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Mặt cầu (T) có phương trình là : $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{17}{4}$.

d) Do phương trình mặt phẳng chứa trục Ox có dạng $py + qz = 0$

Mặt phẳng tiếp xúc của mặt cầu (T) cách tâm B một khoảng bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Ta có : $\dfrac{\left| p.\frac{9}{2} + q.1 \right|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

$\Leftrightarrow |9p + 2q| = \sqrt{17(p^2 + q^2)} \Rightarrow 64p^2 - 13q^2 + 36\,pq = 0.$

Vì p và q không đồng thời bằng 0 và có thể xác định sai khác một thừa số khác 0 nên ta có thể chọn $p = 1$ và đưa đến phương trình bậc hai đối với q : $13q^2 - 36q - 64 = 0$.

Phương trình này có nghiệm $q_1 = 4$ và $q_2 = -\frac{16}{3}$.

Vậy phương trình hai mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (T) là :

Với $q = 4$ ta có : $y + 4z = 0$

và $q = -\frac{16}{13}$ ta có : $13y - 16z = 0$.

D. CÁC ĐỀ TOÁN ĐỂ LUYỆN TẬP

01. Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác vuông góc, hãy lập phương trình mặt cầu (S) :

a) Có tâm I(3; –5; –2) và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình

$$2x - y - 3z + 11 = 0.$$

b) Có AB là đường kính A(6; 2; –5), B(–4; 0; 7).

ĐS : a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = 56.$

b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 62.$

02. Lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau :

a) Có tâm là I(1; 4; –7) và tiếp xúc với mặt phẳng $6x + 6y - 7z + 31 = 0$.

b) Có tâm là I(–1; 2; 3) và đi qua điểm A(–2; 1; 1).

c) Có đường kính AB với A(9; 1; 3) và B(1; 5; 5).

ĐS : a) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 7)^2 = 100.$

b) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 6.$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 6y - 8z + 29 = 0.$

03. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD với A(1; 1; 1), B(–1; 0; 2), C(0; 4; 0), D(–3; 1; 0).

ĐS : $15x^2 + 15y^2 + 15z^2 + 33x - 63y - 27z + 12 = 0.$

04. Lập phương trình mặt cầu đi qua điểm M(3; –2; 2) và đi qua đường tròn :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

HD : Phương trình mặt cầu có thể viết dưới dạng :

$x^2 + y^2 + z^2 - 9 + p(2x + y - z + 2) = 0$ và tìm p.

ĐS : Phương trình mặt cầu : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 13 = 0$.

05. Cho mặt cầu (S) có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0$ và mặt phẳng (α) có phương trình : $2x + 2y + z + 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S).

b) Tìm tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến $(\mathscr{C}) = (S) \cap (\alpha)$.

HD :

- Tìm tâm I của mặt cầu S. Ta có I(6; –2; 3), R = 5.
- Tìm khoảng cách d(I, (α)) = IH với H làm tâm đường tròn giao tuyến. Ta có IH = 4 < R = 5 nên (α) cắt mặt cầu.
- Lập phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của mặt cầu và vuông góc với mặt phẳng (α) tại $H\left(\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Tâm đường tròn là điểm H.

Ta có $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

06. Thiết lập phương trình tiếp diện của mặt cầu tại điểm $M_0(4; 3; 0)$ và viết phương trình đường kính của mặt cầu qua điểm M_0 đó, cho biết mặt cầu có phương trình là : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$.

HD :

- Tìm tâm I của mặt cầu đã cho. Ta có I(3; 1; – 2).
- Dùng công thức phân đôi tọa độ ta có phương trình của tiếp diện là :

$(x - 3)(4 - 3) + (y - 1)(3 - 1) + (z + 2)(0 + 2) = 9$

$\Leftrightarrow x + 2y + 2z - 10 = 0$.

Cách khác :

$M(x; y; z) \in$ tiếp diện tại $M_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{IM_0} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)(4 - 3) + (y - 3).(3 - 1) + Z(0 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y + 2z - 10 = 0$.

07. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng (d) có phương trình

$$(d) : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$$

và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0.$$

HD :

- Chuyển phương trình của đường thẳng (d) thành phương trình tổng quát $(d): \begin{cases} 4x + z - 52 = 0 \\ 4y - z + 4 = 0 \end{cases}$

Mặt phẳng cần tìm thuộc chùm mặt phẳng có phương trình sau đây :

$$\alpha(4x + z - 52) + \beta(4y - z + 4) = 0.$$

Chọn $\alpha = 1$ ta có: $4x + 4\beta y + (1 - \beta)z - 52 + 4\beta = 0$

- Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; 3) và có bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 67} = 9$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S)

$$\Leftrightarrow d(I, (P)) = R = 9 \Leftrightarrow \frac{|4.1 + 4\beta.2 + (1 - \beta).3 - 52 + 4\beta|}{\sqrt{4^2 + 16\beta^2 + (1 - \beta)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\beta^2 + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy ta có 2 mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với S có phương trình là :

$2x - 2y + z - 28 = 0$ và $8x + 4y + z - 100 = 0$.

Phần 3. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 1

01. Các cặp vectơ có tọa độ sau đây, cặp nào cùng phương ?

a) (1; 0) và (0; 1); b) (0; 0) và (0; 1);

c) (–1; 1) và (2; –1); d) (–1; 0) và (1; 0);

e) (1; –1) và (–1; 1).

ĐA : b), d), e).

02. Các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào luôn luôn đúng với mọi điểm A, B, C ?

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$;

c) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$; d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$;

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

ĐA : a), d).

03. Các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào luôn đúng với các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực λ tùy ý ?

a) $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$; b) $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$; c) $(\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}.\vec{b}^{\,2}$;

d) $|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$; e) $|\lambda^2\vec{a}| = \lambda^2|\vec{a}|$

ĐA : a), b), e).

04. Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ góc nào tù ?

a) $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (2, 1)$; b) $\vec{a} = (-2, 1)$, $\vec{b} = (2, 4)$

c) $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (0; 0)$; d) $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (1, 3)$

e) $\vec{a} = (0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1)$.

ĐA : a), c), e).

05. Cho hai điểm phân biệt A và B. Trường hợp nào M nằm ngoài AB nếu :

a) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$; b) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

d) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; e) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BM}$.

ĐA : b), e).

06. Cho A(–2; 1), B(4; 1). Trường hợp nào tam giác ABC vuông nếu :

a) C(–2; 3); b) C(4; 4); c) C(0; 1) d) C(0; 7); c) C(2; 0).

ĐA : a); b).

07. Cho hai điểm A(1; 2), B(–1; 0). Lập các điểm M(x; y) thỏa mãn $MA^2 = MB^2$ là một trong các tập sau đây, hỏi đó là tập nào ?

a) $x - y = 0$; b) $y = 3x - 2$; c) $2x = y$;

d) $x + y - 1 = 0$; e) $2x - y = 1$.

ĐA : d).

08. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$.

b) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{0}$.

c) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} = \vec{0}$; d) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b} < 0$;

e) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{b} = 0$ thì $\vec{b} = 0$.

ĐA : a); b).

09. Các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào có nghĩa ?

a) $\vec{a} + \vec{b} = 0$; b) $\vec{a}.\vec{b} = 0$; c) $(\vec{a} + 0)\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}$;

d) $\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}$; e) $\vec{a}.\vec{b} = 0.\vec{b}$.

ĐA : b).

10. Cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 6)$; $\vec{b} = (-12; 4)$.

Các góc sau góc nào là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$?

a) 0 b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{4}$.

ĐA : c).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 2

01. Đường thẳng d đi qua điểm A không ?

a) d : $x - 2y + 3 = 0$; A(1; 2); b) d : $x - 3y + 5 = 0$; A(0; 1).

c) d : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2}$; A(1; –1).

d) d : $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$; A (2, –1); e) d : $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$.

ĐS : a), d).

02. Vectơ $\vec{a}$ có là vectơ chỉ phương của d không ?

a) d : $3x - 2y + 1 = 0$; $\vec{a} = (2; 3)$. b) d : $2x + y - 1 = 0$; $\vec{a} = (1; 2)$.

c) d : $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{2}$; $\vec{a} = (3; 1)$.

d) d : $\begin{cases} x = -5t \\ y = 2 + 7t \end{cases}$; $\vec{a} = (5; -7)$. e) d : $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$; $\vec{a} = (-2; -1)$.

ĐS : a), c), d).

03. Vectơ $\vec{n}$ có là vectơ pháp tuyến của d không ?

a) d : $3x - 5y + 2 = 0$; $\vec{n} = (3; 5)$. b) d : $2x - 4y + 1 = 0$; $\vec{n} = (-1; 2)$.

c) d : $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-3}$; $\vec{n} = (3; 2)$.

d) d : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$; $\vec{n} = (2; -3)$. e) d : $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$; $\vec{n} = (1; 2)$.

ĐS : b), c), e).

04. Các cặp đường thẳng sau, cặp nào cắt nhau ?

a) $d_1 : x - 2y + 2 = 0$; $d_2 : x - y - 1 = 0$.

b) $d_1 : y = x + 1$; $d_2 : y = 2x + 2$.

c) $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3}$; $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{x+2}{3}$.

d) $d_1 : 2x - 3y + 1 = 0$; $d_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$.

e) $d_1 : 6x - 3y + 5 = 0$; $d_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$.

ĐS : a), b), c).

05. Các cặp đường thẳng sau, cặp nào song song ?

a) $d_1 : 2x - y + 1 = 0$; $d_2 : -2x + y + 2 = 0$.

b) $d_1 : \frac{x-10}{-1} = \frac{x+5}{2}$; $d_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases}$.

c) $d_1 : y = x + 1$; $d_2 : y = x - 10$.

d) $d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \end{cases}$; $d_2 : x - y = 5$.

e) $d_1 : 2x - 5y - 7 = 0$; $d_2 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$.

ĐS : a), c).

06. Các cặp đường thẳng sau, cặp nào vuông góc ?

a) $d_1 : 2x - y + 3 = 0$; $d_2 : x + 2y - 1 = 0$.

b) $d_1 : y = 2x + 3$; $d_2 : 2y = -x + 1$.

c) $d_1 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2}$; $d_2 : \begin{cases} x = 10 - 2t \\ y = -5 - t \end{cases}$.

d) $d_1 : x - 2 = 0$; $d_2 : \begin{cases} x = 0t \\ y = t \end{cases}$.

e) $d_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$; $d_2 : 2x + y - 1 = 0$.

ĐS : a), b), c).

07. Các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của đường thẳng ?

a) $\begin{cases} x = m \\ y = 1 - \dfrac{m}{2} \end{cases}$ với $m \in \mathbb{R}$.

b) $xy = 1$.

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4$.

d) $x^2 + y + 1 = 0$.

e) $10x + 3y = 0$.

ĐS : a), e).

08. Cho phương trình tham số đường thẳng d là : $\begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 1 - k \end{cases}$

Các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tổng quát của d ?

a) $x + 2y - 5 = 0$; b) $x + 2y + 1 = 0$; c) $x - 2y - 1 = 0$

d) $x - 2y + 5 = 0$; e) $x + y + 2 = 0$.

ĐA : b).

09. Đường thẳng nào đi qua A(1; 0) và vuông góc với $\vec{n} = (4; -6)$?

a) $3x - 2y - 1 = 0$; b) $4x - 5y + 1 = 0$;

c) $2x - 3y - 2 = 0$ d) $3x - 2y - 3 = 0$; e) $2x + 3y - 2 = 0$.

ĐA : c).

10. Đường thẳng nào đi qua A(2; 1) và song song với đường thẳng :

$$2x + 3y - 2 = 0 \text{ ?}$$

a) $x - y + 3 = 0$; b) $2x + 3y - 7 = 0$; c) $3x - 2y - 4 = 0$

d) $4x + 6y - 11 = 0$; e) $3x + 2y - 8 = 0$.

ĐA : b).

11. Cho A(5; 3); B(−2; 1). Đường thẳng nào đi qua AB ?

a) $2x - 7y + 11 = 0$; b) $7x + 2y - 41 = 0$ c) $2x + 7y - 5 = 0$;

d) $7x - 2y + 3 = 0$ e) Một đường thẳng khác.

ĐA : a).

12. Cho tam giác ABC với A(7; 9), B(–5; –7) và C(12; –3).

Đường thẳng nào là đường cao hạ từ đỉnh B ?

a) $5x - 12y + 59 = 0$ b) $5x + 12y + 59 = 0$ c) $5x + 12y - 59 = 0$

d) $5x - 12y - 59 = 0$ e) Một đường thẳng khác.

ĐA : d).

13. Cho A(2; 1), B(4; –3). Đường thẳng nào là trung trực của AB ?

a) $3x + 2y - 7 = 0$ b) $2x - 3y - 9 = 0$ b) $2x + 3y - 5 = 0$

d) $3x - 2y + 1 = 0$ e) Một đường thẳng khác.

ĐA : b).

14. Cho các đường thẳng : $d_1 : x + 3y - 7 = 0$; $d_2 : 6x + 8y - 35 = 0$

$d_3 : 4x + y - 2 = 0$.

Số nào sau đây là khoảng cách từ giao điểm của d_1 và d_2 đến d_3 ?

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) Một số khác.

ĐA : e).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 3

01. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn ?

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$; b) $x^2 - y^2 - 1 = 0$

c) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 4 = 0$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1$;

e) $4(x^2 + y^2) - x = 0$.

ĐA : a); e).

02. Đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng d không ?

a) (C) : $x^2 + y^2 = 1$; (d) : $x = -1$.

b) (C) : $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; (d) : $y = 2$.

c) (C) : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$; (d) : $y = x$.

d) (C) : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$; (d) : $y = 0$.

e) (C) : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$; (d) : $x = 0$.

ĐA : a), b), c).

03. Số a có phải là phương tích của đường tròn (C) tại điểm O(0; 0) không ?

a) (C) : $x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 = 0$; $a = 1$.

b) (C) : $x^2 + y^2 = 4$; $a = 4$.

c) (C) : $4(x^2 + y^2) - 1 = 0$; $a = 1$.

d) (C) : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 1 = 0$; $a = -1$.

e) (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$; $a = -12$.

ĐA : a), e).

04. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) có phương trình $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

a) Đường tròn ($\mathscr{C}$) đi qua gốc tọa độ.

b) Đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm là gốc tọa độ.

c) Đường tròn ($\mathscr{C}$) cắt đường thẳng x = 1 tại hai điểm.

d) Đường tròn ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với đường tròn có phương trình

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

e) Đường tròn ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với đường thẳng có phương trình : $y = -\frac{1}{2}$.

ĐA : b), d), e).

05. Cho A(1; 1) và B(7; 5). Phương trình nào là phương trình của đường tròn đường kính AB ?

a) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 12 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 12 = 0$

e) Một phương trình khác.

ĐA : b).

06. Phương trình nào là phương trình của đường tròn tâm nằm trên đường thẳng : y = x, bán kính R = 4.

a) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$; b) $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$

c) $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$; d) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$

e) Một đường thẳng khác.

ĐA : a), b).

07. Đường thẳng nào là tiếp tuyến của đường tròn :

(C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$ tại điểm M(5; 2) ?

a) $4x + y + 25 = 0$ b) $4x + y - 15 = 0$ b) $2x + 3y + 15 = 0$

d) $2x + 3y - 5 = 0$ e) Một đường thẳng khác.

ĐA : e).

08. Với giá trị nào của m thì

$$x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 2(m + 1)y + (m + 1)(m + 2) = 0$$

là phương trình của một đường tròn đi qua gốc tọa độ ?

a) m = −1; b) m = 0; c) m = −2; d) m = 1; e) m = 2.

ĐA : c).

09. Cặp đường thẳng nào là tiếp tuyến của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x = 0$ vẽ từ điểm A(1; 2) ?

a) $x - 2 - 4x = 0$ vẽ từ điểm A(1; 2).

b) $x - 2 = 0$ và $4x - 3y + 2 = 0$ c) $y - 2 = 0$ và $4x + 3y - 2 = 0$

d) $y - 2 = 0$ và $4x + 3y - 2 = 0$ e) Một cặp đường thẳng khác.

ĐA : c).

10. Trong mặt phẳng Oxy cho A(4; 0), B(0; 3). Đường thẳng nào đi qua A và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB ?

a) $4x + 3y + 16 = 0$ b) $4x + 3y - 16 = 0$

c) $-4x + 3y - 16 = 0$ d) $-4x + 3y + 16 = 0$

e) Một đường thẳng khác.

ĐA : d).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 4

01. Phương trình nào là phương trình của elip ?

a) $4x^2 + 5y^2 = 1$. b) $4(x - 1)^2 + 5(y + 2)^2 = 3$.

c) $x^2 + 2y = 1$. d) $(x - 1)^2 + y^2 = 0$. e) $4x^2 + 9y^2 = 36$.

ĐA : a), b), e).

02. Các số sau đây, số nào là tâm sai của elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$?

a) 3; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{3}$; d) 1; e) –1.

ĐA : b).

03. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Hình elip chỉ có 2 trục đối xứng.

b) Hình elip chỉ có một tâm đối xứng.

c) Hình elip có vô số hình bình hành nội tiếp.

d) Hình elip chỉ có một hình thoi nội tiếp.

e) Hình elip chỉ có một hình chữ nhật ngoại tiếp.

ĐA : a), b), c).

04. Cho hình elip có phương trình : $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Elip nhận Ox, Oy là các trục đối xứng.

b) Elip có hai tiêu điểm nằm trên Ox.

c) Elip có trục dài 2a = 4 và trục ngắn 2b = 2.

d) Elip có gốc tọa độ là tâm đối xứng.

e) Elip có tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ĐA : a, b, c, d.

05. Phương trình nào là phương trình chính tắc của elip có các tiêu điểm $F_1(0; -4)$, $F_2(0; 4)$ và tâm sai $e = \frac{4}{5}$?

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$; c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$; e) Một phương trình khác.

ĐA : b).

06. Đường thẳng nào là tiếp tuyến của elip (E) : $x^2 + 4y^2 - 40 = 0$ song song với đường thẳng $3x + 2y + 1 = 0$?

a) $3x + 2y - 20 = 0$ b) $x + y - 10 = 0$ c) $x - y + 10 = 0$

d) $3x + 2y + 20 = 0$ e) $2x - 3y + 20 = 0$.

ĐA : a), b).

07. Trong mặt phẳng cho hai elip : $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ và $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Chúng có bao nhiêu tiếp tuyến chung ?

a) Không có; b) 1 c) 2 d) 3 e) 4.

ĐA : e).

08. Biết rằng qua điểm M(8; 6) vẽ được hai tiếp tuyến với elip

$$(E) : 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0.$$

Đường thẳng nào là đường thẳng đi qua hai tiếp điểm ?

a) $x + y + 4 = 0$ b) $x + 4y + 6 = 0$ c) $3x + 4y - 6 = 0$

d) $3x - 4y + 144 = 0$ e) Một đường thẳng khác.

ĐA : c).

09. Cho elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Đường thẳng nào sau đây cắt elip ?

a) $x = 3$ b) $y = 3$ c) $y = x + 4$

d) $x - y = 4$ e) $x - y - 6 = 0$.

ĐA : a), c), d).

10. Cho elip : $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. Số nào sau đây là diện tích của elip ?

a) 12 b) 5π c) 12π d) $5\sqrt{2}\pi$ e) $4\sqrt{3}\pi$.

ĐA : c).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 5

01. Phương trình nào là phương trình của hypebol ?

a) $x^2 - y^2 = -2$.   b) $x^2 - (1 - y)^2 = 1$.

c) $x - y^2 = 1$.   d) $y^2 - 2x^2 = 2y$.

ĐA : a), b), d).

02. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$. Điểm nào là tiêu điểm của (H) ?

a) (−3; 0);   b) (5; 0);   c) (0; 4);   d) (0; 5);   e) (0; −5).

ĐA : d), e).

03. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$. Số nào là tâm sai của (H) ?

a) 1.   b) $\frac{3}{4}$.   c) $\frac{\sqrt{7}}{3}$.   d) $\frac{4}{3}$.   e) $\frac{4}{\sqrt{7}}$.

ĐA : d).

04. Cho hypechol (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$. Đường thẳng nào tiếp xúc với (H) ?

a) $x - y = 0$.   b) $x = 3$.   c) $x - y - 3 = 0$.

d) $x + y + 3 = 0$.   e) $x = -3$.

ĐA : b), e).

05. Cho hypebol có phương trình $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

a) Hypebol nhận Ox làm trục thực.

b) Hypebol nhận Oy làm trục thực.

c) Tiêu điểm của hypebol nằm trên Ox.

d) Hypebol có hai đường tiệm cận là $y = \pm \frac{3}{2}x$.

e) Hybebol có hai đường tiệm cận là : $y = \pm \frac{2}{3}x$.

ĐA : a), c), e).

06. Hybebol (H) có các tiêu điểm $F_1(0; -3)$; $F_2(0; 3)$ và một đỉnh là A(0; 2). Phương trình nào là phương trình của (H) ?

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$;   b) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$;   c) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

d) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$;   e) $x^2 - y^2 = 1$.

ĐA : d).

07. Cho hybebol (H) : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Có bao nhiêu điểm thuộc (H) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông ?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4.

ĐA : e).

08. Cho hybebol (H) : $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$. Cặp đường thẳng nào là các tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 7 = 0$?

a) $\begin{cases} 3x - 4y - 10 = 0 \\ 3x - 4y + 10 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + 20 = 0 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 3y + 10 = 0 \\ 4x - 3y - 10 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 3y + 10 = 0 \\ 4x + 3y - 10 = 0 \end{cases}$ e) Một cặp đường thẳng khác.

ĐA : a).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 6

01. Phương trình nào sau đây là phương trình của parabol ?

a) $y = 2x + x^2$. b) $y^2 = x - 2y$. c) $x^2 = 2x - y^2$.

d) $2x = (y - 1)^2$. e) $x^2 = y^2 - 1$.

ĐA : a); b); d).

02. Cho parabol : $y^2 = 4x$. Đường thẳng nào sau đây tiếp xúc với parabol ?

a) $x = 0$. b) $y = 2$. c) $x - y + 2 = 0$. d) $x + y = 0$. e) $y = x$.

ĐA : a)

03. Mệnh đề nào đúng ?

a) Parabol chỉ có một trục đối xứng.

b) Mọi đường thẳng song song với trục của parabol cắt parabol tại một điểm duy nhất.

c) Mọi đường thẳng không song song với trục của parabol đều cắt parabol tại hai điểm.

d) Từ một điểm nằm ngoài parabol đều vẽ được hai tiếp tuyến với parabol.

e) Parabol không có một tâm đối xứng.

ĐA : a); b); d).

04. Cho parabol (P) : $y^2 = 8x$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

a) Parabol (P) có trục đối xứng là Oy.

b) Tiêu điểm của parabol (P) nằm trên trục Ox.

c) Gốc tọa độ là đỉnh parabol (P).

d) Đường thẳng $x = 1$ cắt parabol tại hai điểm.

e) Điểm (0; 1) nằm trong parabol.

ĐA : b); c); d).

05. Cho parabol $x^2 = 4y$. Điểm nào sau đây là tiêu điểm F parabol ?

a) (2; 0) b) (0; 2) c(4; 0) d) (0; 4) e) (0; –2).

ĐA : b)

06. Cho x = 3 là đường chuẩn của parabol. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của parabol ?

a) $x^2 = -12y$ b) $y^2 = 12x$ c) $x^2 = 12y$

d) $y^2 = -12x$ e) Một phương trình khác.

ĐA : d).

07. Cho parabol (P) : $y = 2x^2$. Đường thẳng nào tiếp xúc với (P) tại điểm $M(\frac{1}{2}; -1)$?

a) $x + y + 1 = 0$ b) $x - y - 1 = 0$ c) $2x + 2y + 1 = 0$

d) $2x - 7 + 1 = 0$ e) $x - 2y + 1 = 0$.

ĐA : c).

08. Cho parabol (P) : $y = 2x^2$. Đường nào là tiếp tuyến của (P) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất ?

a) $x - 1 = 0$ b) $y - 1 = 0$ c) $x + y + 1 = 0$

d) $x - y + 1 = 0$ e) Một đường thẳng khác.

ĐA : d).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 7

01. Trong không gian Oxyz cho điểm M(1; 2; 3). Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

a) Tọa độ hình chiếu của M lên trục Ox là $M_1(1; 0; 0)$.

b) Tọa độ hình chiếu của M lên trục Oz là $M_3(0; 0; 3)$.

c) Tọa độ hình chiếu của M lên mp (Oxy) là M'(1; 2; 0).

d) Các mệnh đề A, B, C đều sai.

ĐA : Chọn a), b), c).

02. Trong không gian Oxyz cho điểm (4; –3; 2). Trong bốn mệnh đề sau, mệnh đề đúng là :

a) Điểm đối xứng của I qua gốc tọa độ O là $I_1(-4; 3; -2)$.

b) Điểm đối xứng của I qua mp (Oxyz) là $I_2(-4; -3; 2)$.

c) Điểm đối xứng của I qua trục Oz là $I_3(-4; 3; -2)$.

d) Điểm đối xứng của I qua điểm M(1; 1; 1) là điểm $I_4(-2; 5; 0)$

ĐA : a), b).

03. Cho $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a};\vec{b}) = 60^0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) $\vec{a}.\vec{b} = 1$ b) $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ c) $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ d) $\vec{a}.\vec{b} \le 2$.

ĐA : Chọn a), c).

04. Tính tọa độ của vectơ đơn vị $\vec{e}$ biết rằng nó vuông góc với vectơ $\vec{a} = (1; 1; 0)$ và vectơ $\vec{b} = (0; 1; 1)$. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào là sai ?

a) $\vec{e} = (-1; 1; 1)$.

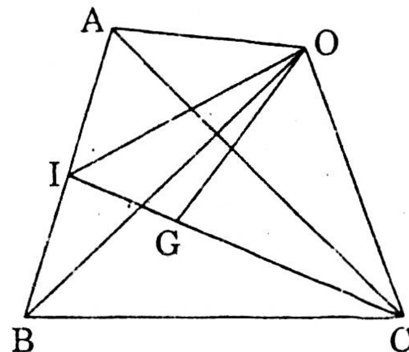
b) $\vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

c) $\vec{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

d) $\vec{e} = 1; 0; 1)$.

ĐA : Chọn a, d.

05. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác, I là trung điểm của cạnh AB, O là một điểm tùy ý. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :



a) $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

b) $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

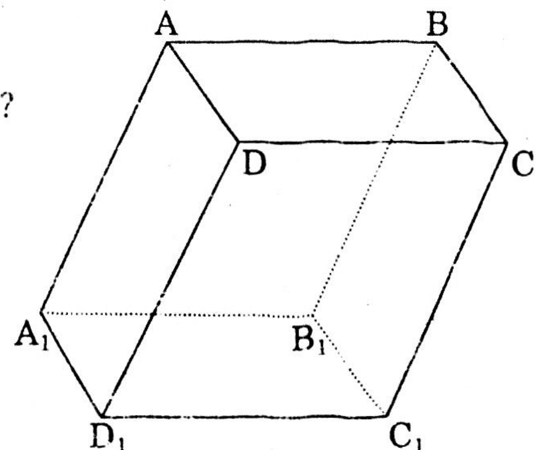
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

ĐA : a), d).

06. Cho hình hộp $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$

b) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{CD_1}$

c) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{AD_1}$

d) $\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{D_1B}$.

ĐA : Tất cả các mệnh đề a), b), c), d) đều đúng.

07. Trong không gian Oxyz cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

a) Nếu $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = 0$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng

b) Nếu $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

c) Nếu $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và có ít nhất một trong các số m, n, p khác 0 thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

d) Nếu $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ khi và chỉ khi m = n = p = 0 thì : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

ĐA : Chọn a, c.

08. Trong không gian Oxyz cho tam giác A, B, C với A(1; 0; –2) B(2; 1; –1), C(1; –2; 2). Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

a) Độ dài cạnh AB là $\sqrt{3}$.

b) Trung điểm I của cạnh BC là $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

c) Trọng tâm G của tam giác ABC là $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

d) $\cos A = \frac{2\sqrt{65}}{65}$.

ĐA : Chọn a, c.

09. Trong không gian Oxyz cho bốn vectơ $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (5; 7; 0)$, $\vec{c} = (3; -2; 4)$ và $\vec{d} = (4; 12; -3)$. Đẳng thức nào sau đây đúng ?

a) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

c) $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

d) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

ĐA : Chọn b.

10. Cho tam giác ABC với A(1; 2; –1), B(2; –1; 3), C(–4; 7; 5). Tính độ dài đường phân giác trong của góc $\hat{B}$. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào là đúng ?

a) $\sqrt{27}$. b) $\frac{2}{3}$. c) $\frac{\sqrt{37}}{2}$. d) $\frac{2\sqrt{74}}{3}$.

ĐA : Chọn d.

11. Cho tứ diện ABCD với A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và D (1; 1; 1). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD hãy tính độ dài của đoạn MN. Trong các kết quả sau kết quả nào đúng ?

a) 1. b) $\frac{3}{4}$. c) $\frac{3}{2}$. d) $1\frac{1}{4}$. e) Một kết quả khác.

ĐA : Chọn a.

12. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ tùy ý và x, y, z là các số thực. Trong bốn mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

a) Nếu x = y = z = 0 thì $x\vec{a} - y\vec{b}$, $z\vec{b} - x\vec{c}$, $y\vec{c} - z\vec{a}$ đồng phẳng

b) Nếu x, y, z không đồng thời bằng 0 thì ba vectơ : $x\vec{a} - y\vec{b}$, $z\vec{b} - x\vec{c}$, $y\vec{c} - z\vec{a}$ đồng phẳng.

c) Nếu $\vec{a} = (x + y)\vec{b} + z\vec{c}$ với x, y, z đều khác không thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

d) Nếu $x\vec{a} = y\vec{b} + z\vec{c}$ với x, y, z đều khác không thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

ĐA : Chọn a, b, c, d.

13. Trong không gian cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có chung trọng tâm G. Xét các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ là ba vectơ đồng phẳng.

b) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ là ba vectơ không đồng phẳng.

c) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

ĐA : Chọn a và c.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 8

01. Trong không gian Oxyz cho điểm A(2; 6; –3). Xét các mệnh đề sau đây xem mệnh đề nào đúng ?

a) Mặt phẳng qua A và song song với mặt phẳng (xOy) là z + 3 = 0.

b) Mặt phẳng qua A và song song với mặt phẳng (yOz) là x – 2 = 0.

c) Mặt phẳng qua A và song song với mặt phẳng (zOx) là y – 6 = 0.

d) Mặt phẳng qua A và chứa trục Ox là : y + 2z = 0.

ĐA : Chọn a, b, c, d.

02. Trong không gian các phương trình đã cho sau đây là phương trình của mặt phẳng. Hãy xét xem kết quả nào là đúng :

a) $2x = 0$; b) $5x + 2y - z = 0$; c) $3x^2 + y + z^2 + 5 = 0$

d) $2x - y + z^2 - 7 = 0$; e) $6x + 5y + 1 = 0$.

ĐA : Chọn a, b, e.

03. Xét xem các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

a) Mặt phẳng có phương trình x + 2y – 5 = 0 song song với trục Oz.

b) Mặt phẳng có phương trình y – 2z + 3 = 0 song song với trục Ox.

c) Mặt phẳng có phương trình $x + y + z + 1 = 0$ song song với trục Oz.

d) Hai mặt phẳng $x + y - z + 1 = 0$ và $2x + 2y - 2z - 5 = 0$ song song với nhau.

ĐA : Chọn a, b, d.

04. Các mặt phẳng có phương trình sau đây đi qua gốc tọa độ : xét xem mệnh đề nào đúng ?

a) $3y = 0$; b) $5x + 2y - z = 0$

c) $x + 4y - 3z + 7 = 0$; d) $3x - 7z = 0$.

ĐA : Chọn a, b, d.

05. Chọn các mặt phẳng có phương trình sau đây nhận $\vec{n} = (0; 1; -3)$ làm vectơ pháp tuyến.

a) $x + y - 3z - 1 = 0$; b) $y - 3z + 15 = 0$

c) $2y - 6z + 7 = 0$; d) $x + y - 10 = 0$.

ĐA : Chọn b, c.

06. Hãy xét xem các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Hai mặt phẳng $x = 0$ và $y = 0$ xác định một chùm mặt phẳng.

b) Điểm gốc tọa độ thuộc chùm mặt phẳng có phương trình :

$$\alpha(2x + 3y - z) + \beta(y + z) = 0.$$

c) Ba mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ thuộc một chùm mặt phẳng.

d) Hai mặt phẳng $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + z = 1$ và $x = 0$ xác định một chùm mặt phẳng.

ĐA : Chọn a, b, d.

07. Hãy chọn các mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

a) Khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng $x + y + 2z - 4 = 0$ bằng 1.

b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $x - 1 = 0$ và $x + 2 = 0$ bằng 3.

c) Góc nhọn tạo nên bởi hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai vectơ pháp tuyến của chúng.

d) Góc nhọn giữa mặt phẳng $x + y + z = 1$ và mặt phẳng $x = 0$ bằng 45^0.

ĐA : Chọn b.

08. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

a) Mặt phẳng $2x - 3y + z + 7 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -6; 2)$.

b) Góc giữa mặt phẳng $z = 0$ và mặt phẳng $y - z = 0$ bằng $\frac{\pi}{4}$.

c) Khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng $x + 2y - 5z - 7 = 0$ bằng 7.

d) Hai mặt phẳng $x = 0$ và $y = 0$ vuông góc với nhau.

e) Hai mặt phẳng $z = 2$ và $y + z = 0$ song song với nhau.

ĐA : Chọn a, b, d.

09. Hãy chọn các mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

a) Hai mặt phẳng $x + 2y = 0$ và $x - y = 0$ cắt nhau.

b) Hai mặt phẳng $y - 6 = 0$ và $y + z = 0$ song song với nhau.

c) Mặt phẳng $2x - 3y + 4z + 4 = 0$ chứa điểm $M(-2; 0;0)$.

d) Mặt phẳng $xy + yz = 0$ đi qua gốc tọa độ.

ĐA : Chọn a, c.

10. Cho vectơ $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (0; 1; 0)$. Hãy chọn các mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

a) Mặt phẳng (P) có phương trình : $x - z + 1 = 0$ nhận $\vec{a}$, $\vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương.

b) Mặt phẳng (Q) có phương trình $2x + 2z - 1 = 0$ nhận $\vec{a}$ làm vectơ pháp tuyến.

c) Mặt phẳng (R) có phương trình : $2y - 3 = 0$ nhận $\vec{b}$ làm vectơ pháp tuyến.

d) Hai mặt phẳng (Q) và (R) vuông góc với nhau.

ĐA : Chọn a, b, c, d.

11. Cho hệ trục tọa độ Oxyz và ba điểm $A(1;0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Hãy chọn các mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

a) Mặt phẳng qua A song song với mặt phẳng (yOz) có phương trình :

$$x - 1 = 0.$$

b) Mặt phẳng chứa A và B và song song với Oz có phương trình :

$$x + \frac{y}{2} - 1 = 0.$$

c) Mặt phẳng (ABC) có phương trình : $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} - 1 = 0$.

d) Mặt phẳng $2x + 3y + 2z + 1$ song song với mặt phẳng (ABC).

ĐA : Chọn a, b, c.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 9

01. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; 0; -3)$ và nhận $\vec{a} = (2; -3; 5)$ làm vectơ chỉ phương. Hãy tìm các mệnh đề sai :

a) Phương trình tham số của đường thẳng (d) là : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3t \\ z = -3 - 5t \end{cases}$

b) Phương trình chính tắc của đường thẳng (d) là : $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$

c) Phương trình tổng quát của đường thẳng (d) là : $\begin{cases} 3(x-2) + 2y = 0 \\ -5(x-2) = 2(z-3) = 0 \end{cases}$

ĐA : Chọn b).

02. Phương trình chính tắc của đường thẳng (d) đi qua điểm A(1; 4; –7) và vuông góc với mặt phẳng x + 2y – 2z = 0 trong không gian Oxyz là :

a) $x - 1 = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$.

b) $x - 1 = y - 4 = z + 7$.

c) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+7}{2}$.

Hãy tìm các mệnh đề sai.

ĐA : Chọn b, c.

03. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (d) có phương trình :

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 3x - 4z = 0 \end{cases}.$$

a) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (4; -4; -3)$.

b) Đường thẳng (d) cắt mặt phẳng x + y + z + 1 = 0.

c) Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng 4x + 4y + 5 = 0.

Hãy tìm các mệnh đề đúng.

ĐA : Chọn a), b), c).

04. Trong không gian cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) :

$$(d_1) : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = t' \\ z = 3 + 4t' \end{cases}.$$

Hai đường thẳng (d_1), (d_2) :

a) Cùng phương.

b) Vuông góc với nhau.

c) Chéo nhau.

d) Cắt nhau.

Trường hợp nào đúng ?

ĐA : Chọn c).

05. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (Δ) có phương trình

$$(\Delta) : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Hãy xét xem mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng :

a) Đường thẳng (Δ) song song với trục Oz.

b) Mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2z = 0$ chứa (Δ).

c) Đường thẳng (Δ) đi qua gốc tọa độ.

ĐA : Chọn b, c.

06. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau có phương trình :

$$(d_1) : \begin{cases} x = 1 - u \\ y = u \\ z = -u \end{cases} \qquad (d_2) : \begin{cases} x = 2v \\ y = 1 - v \\ z = v \end{cases}.$$

a) Đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) có vectơ chỉ phương là

$$\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (0; -1; -1).$$

b) Mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2) có phương trình là :

$$y + z = 0.$$

c) Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) bằng khoảng cách giữa điểm M(0; 1; 0) thuộc d_2 đến mặt phẳng (P) được tính theo công thức :

$$d(d_1, d_2) = d(M, P) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ĐA : Chọn a, b, c.

07. Hãy ghi rõ đặc điểm và tính chất của đường thẳng cho bằng các phương trình sau :

1) $x = y = z$ 2) $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} z - y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Hãy chọn các mệnh đề đúng sau đây :

a) Phương trình đường thẳng trong cả trường hợp 1, 2, 3 đều đi qua gốc tọa độ O(0; 0; 0) và đi qua điểm E(1; 1; 1).

b) Phương trình trong trường hợp 2, là phương trình đường phân giác của $\widehat{xOy}$.

c) Phương trình trong trường hợp 3, là phương trình đường phân giác của $\widehat{xOz}$.

ĐA : Chọn a, b.

08. Cho đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$.

Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau :

a) Đường thẳng (d) đi qua điểm M(3; −1, 4) và nhận $\vec{a} = (4; -1; 2)$ làm

vectơ chỉ phương.

b) Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng $6x - 2y + 8z - 1 = 0$.

c) Đường thẳng (d) song song với mặt phẳng $2y + z - 2 = 0$.

d) Đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng (d') có phương trình :

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}.$$

ĐA : Chọn b, c, d.

09. Cho đường thẳng (d) có phương trình $x = y = z$ đối với hệ tọa độ Oxyz. Hãy chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau :

a) Đường thẳng (d) cắt mặt phẳng $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

b) Đường thẳng (d) cắt các mặt phẳng tọa độ : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

c) Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $x - y = 0$.

d) Hình chiếu vuông góc của (d) trên mặt phẳng (xOy) là $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

ĐA : Chọn d.

10. Hãy chọn các mệnh đề đúng trong các mệnh sau đây :

Các phương trình sau đây là phương trình đường thẳng trong không gian

a) $x = y = 1$ b) $\begin{cases} 2x = y \\ z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 = yz \\ \frac{1}{x} = y \end{cases}$ d) $2x - 3y + 5z + 6 = 0$.

ĐA : Chọn a, b.

11. Hãy chọn các mệnh đúng sau đây :

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm M(1; 2; 3).

a) Đường thẳng OM có phương trình : $\begin{cases} 2x = y \\ 3x = z \end{cases}$

b) Đường thẳng đi qua M và song song với trục Oz có phương trình : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

c) Đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (yOz) có phương trình : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

d) Khoảng cách giữa đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (yOz) với đường thẳng Ox bằng 2.

ĐA : Chọn a, b, c.

12. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho đường thẳng (d) có phương trình :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

Hãy chọn các mệnh đúng sau đây :

a) Đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ.

b) Đường thẳng (d) thuộc mặt phẳng $3x - 2y + 1 = 0$.

c) Điểm M(3; 5; 7) thuộc đường thẳng (d).

d) Đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (xOy).

ĐA : Chọn b, c.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHUYÊN ĐỀ 10

01. Mặt cầu tâm I(1; 2; –3), bán kính R = 2 có phương trình là :

a) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$.

b) $(x - 1)^2 + (y - 2) + (z + 3)^2 = 2^2$.

c) $x^2 + y^2 + z^3 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$.

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào là đúng ?

ĐA : Chọn b, d.

02. Trong không gian cho mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

a) (S) là mặt cầu tâm I(1; –2; 3) và có bán kính bằng 5.

b) (S) là mặt cầu tâm H (–1; 2; –3) và có bán kính bằng 7.

c) (S) là mặt cầu tâm M(1; 2; 3) và có bán kính bằng 6.

d) (S) là mặt cầu đi qua gốc tọa độ O(0; 0; 0).

ĐA : Chọn a.

03. Trong các phương trình sau, phương trình nào là mặt cầu (S) đi qua điểm M(1; –1; 4) và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ ?

a) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

b) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 27$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y + 3z - 9 = 0$.

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 9z + 18 = 0$.

e) Không phải các phương trình trên.

HD : Tâm I của mặt cầu phải thuộc phần không gian chúa M($x > 0$, $y < 0$, $z > 0$). Vậy I(R; –R; R) và ta có : $(1 - R^2) + (-1 + R)^2 + (4 - R)^2 = R^2 \Rightarrow R = 3$.

Do đó ta chọn a.

04. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình là :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0.$$

Xét các mệnh đề sau đây xem mệnh đề nào là đúng :

a) Mặt cầu (S) đi qua gốc tọa độ.

b) Tâm của mặt cầu là I(1; 2; 3).

c) Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng $x = 0$.

d) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 1$.

ĐA : Chọn a, b, c.

05. Trong không gian Oxyz cho điểm I(–3; 1; 2) và mặt phẳng

$$(\alpha) : 2x + 3y + z - 13 = 0.$$

a) Mặt cầu tâm I, bán kính $R = 4$ cắt mặt phẳng (α).

b) Mặt cầu tâm I, bán kính $R = 4$ tiếp xúc mặt phẳng (α).

c) Mặt cầu tâm I, bán kính $R = 4$ cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính $r = \sqrt{2}$.

d) Mặt cầu tâm I, bán kính $R = 1$ cắt mặt phẳng (α).

Trong các mệnh đề nêu trên, mệnh đề nào là đúng ?

ĐA : Chọn a, c.

06. Cho mặt cầu (S) có phương trình : $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$.

Chọn các mệnh đề đúng sau đây :

a) Điểm M (7; –1; 5) thuộc mặt cầu (S).

b) Mặt phẳng $2x + 3y + 6z - 5 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu.

c) Mặt phẳng $6x + 2y + 3z - 55 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu.

d) Mặt phẳng $x + 2y + 2z - 7 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu.

ĐA : Chọn a, c.

07. Cho mặt cầu (S) có phương trình : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ và mặt phẳng (α) có phương trình : $2x - 2y - z + 9 = 0$.

Hãy chọn các mệnh đề đúng sau đây :

a) Mặt cầu (S) không cắt mặt phẳng (α).

b) Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (α) theo một đường tròn ($\mathscr{C}$).

c) Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (α) theo đường tròn ($\mathscr{C}$) có bán kính $r = 8$.

d) Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (α) theo đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm là điểm H(–1; 2; 3).

ĐA : Chọn b, c, d.

08. Hãy chọn các mệnh đề đúng sau đây :

Trong không gian, các phương trình sau đây là phương trình mặt cầu :

a) $x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$ b) $x^2 + y - 10 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2 = 0$ d) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{3} - 3 = 0$.

ĐA : Chọn c, d.

09. Cho mặt cầu (S) có phương trình : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

Hãy chọn các mệnh đề đúng sau đây :

a) Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

b) Tâm mặt cầu (S) là điểm I, thuộc đường thẳng có phương trình : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

c) Mặt cầu (S) đi qua gốc tọa độ.

d) Mặt cầu (S') tiếp xúc với mặt cầu (S) cho trước và có phương trình là :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

ĐA : Chọn a, b.

10. Chọn các mệnh đề đúng sau đây :

a) Phương trình $x^2 + y^2 = 1$ là phương trình một mặt cầu.

b) Phương trình $ax^2 + by^2 + z^2 = abc$ với $a \neq b \neq c \neq a$ là phương trình một mặt cầu.

c) Phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$ là phương trình của một đường tròn trong không gian.

d) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 15 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

ĐA : Chọn c.

MỤC LỤC

-NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: MINH HẢI
Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

***Thực hiện liên kết:* Nhà sách HỒNG ÂN**

PHƯƠNG PHÁP TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC HÌNH HỌC GIẢI TÍCH
Mã số: 1L - 252ĐH2008
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 511 - 2008/CXB/18- 94/ĐHQGHN ngày 12/6/2008
Quyết định xuất bản số: 252LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2008.